DMA – IMECC – UNICAMP
MS629- Programação não linear Prof. ROBERTO ANDREANI Sala 133

Lista III

1. Considere a função quadrática $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + b^T x + c$, onde $Q = Q^T \in I\!R^{n\times n}$, $b \in I\!R^n$ e $c \in I\!R$. Seja $\bar{x}$ um minimizador local de f. Prove que f é minimizador global.

2. Mostre com um desenho que se $\nabla f(x)^T d = 0$ pode ser de descida, subida ou nenhuma das duas coisas.

3. Considere o sistema não linear
$$f_i(x) = 0, \quad f_i : I\!R^n \to I\!R, \quad i = 1, \ldots m$$
Como resolveria este problema com técnicas de otimização irrestrita.

4. Seja $f(x) = \frac{1}{2}\|F(x)\|^2$, onde $F : I\!R^n \to I\!R^n$. Considere o método iterativo definido por
$$x^{k+1} = x^k - \lambda_k (J_F(x^k))^{-1} F(x^k)$$
Suponha que $J_F(x^k)$ é não singular para todo x. Prove que se na condição de Armijo usamos $\alpha = 0.5$, resulta
$$\frac{f(x^{k+1})}{f(x^k)} \leq 1 - \lambda_k$$

5. Seja $f : I\!R \to I\!R$, $f \in C^2$, $f'(0) < 0$e $f''(x) < 0$, para todo $x \in I\!R$. Seja $\alpha \in (0, 1)$. Prove que para todo $x > 0$
$$f(x) \leq f(0) + \alpha x f'(0)$$

6. Se um método de direções de descida com busca linear exata é utilizado para minimizar uma função $q : I\!R^n \to I\!R$, mostre que o passo ótimo é dado por
$$\lambda = -\frac{d^T \nabla q(x)}{d^T \nabla^2 q(x) d}$$

7. O critério de decréscimo suficiente (condição de Armijo) exige que $\lambda \in I\!R$ tal que
$$\varphi(\lambda) = f(x + \lambda d) < f(x) + \alpha\lambda \nabla^T f(x) d = \varphi(0) + \alpha\lambda\varphi'(0) \;\; (*)$$
Com $\alpha \in (0, 1)$. Se f é uma quadrática co Hessiana definida positiva, então φ é uma parábola. Prove que se o minimizador $\tilde{\lambda}$ dessa parábola é admissível em $(*)$devemos ter $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$

8. Seja $f : I\!R^n \to I\!R$ $x, d \in I\!R^n$ce $\lambda > 0$ tal que $x + \alpha d$ satisfaz a condição de Armijo. Seja $0 < \mu < \lambda$, μ satisfaz a condição de Armijo ?. Prove ou dê um contraexemplo.

9. Sejam $f : I\!R^n \to R$, $f \in C^2$ e $\tilde{x} \in I\!R^n$tal que $\nabla f(\tilde{x}) = 0$ é $\nabla^2 f(\tilde{x})$ não é semi definida positiva. Prove que existe uma direção de descida d em $\tilde{x}$.

10. No processo de minimizar uma função $f : I\!R^n \to R$, $f \in C^1$, a iteração x^k foi obtida fazendo busca linear ao longo da direção d^{k-1}. Determine uma direção d^k ortogonal a d^{k-1}, de descida a partir de x^k e que seja uma combinação linear de d^{k-1} e $\nabla f(x^k)$.

11. Sejam $f : I\!R^n \to R$ e $\tilde{x} \in I\!R^n$ tal que $\nabla f(\tilde{x}) \neq 0$ é seja $M \in I\!R^{n \times n}$ é simétrica definida positiva. Prove que existe uma direção de descida $d = -M\nabla f(\tilde{x})$ é uma direção de descida em $\tilde{x}$

12. Dada $f(x)$ quadrática com Hessiana definida negativa, mostrar que se $\nabla^T f(\tilde{x})d < 0$ não existe α que verifique a condição de Armijo a em $\tilde{x}$ na direção d