DMA – IMECC – UNICAMP

MS629- PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR PROF. ROBERTO ANDREANI SALA 133

Lista I

1. Seja $g : I\!R \to I\!R$ uma função estritamente crescente e $f : I\!R^n \to I\!R$ provar que minimizar $f(x)$ é equivalente a minimizar $g(f(x))$.

2. Resolva o problema de minimizar $\|Ax - b\|$, onde $A \in I\!R^{m\times m}$ e $b \in I\!R^m$. Considere todos os casos possíveis, interprete geometricamente.

3. Considere os números $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. Encontre a solução dos seguintes problemas.

   - Minimizar $\sum_{i=1}^n |x - a_i|$
   - Minimizar $\text{Max}\{|x - a_i|, \;\; i = 1, \ldots n\}$
   - Minimizar $\sum_{i=1}^n |x - a_i|^2$
   - Maximizar $prod_{i=1}^n |x - a_i|$

4. obtenha as expressões para a as derivadas primeira e segundas da função de Rosembrock
$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2.$$
Verifique que $x^* = (1, 1)$ é um minimizador local.

5. Achar os pontos estacionários de
$$f(x) = 2x_1^3 - 3x_1^2 - 6x_1x_2(x_1 - x_2 - 1)$$

6. Provar que $f(x) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)$, provar que $\tilde{x} = (0, 0)$ é um minimizador local de $\phi(t) = f(\tilde{x} + \lambda d)$ para todo d, mas não é minimizador local de f.

7. provar que as função $f(x) = (x_2 - x_1^2)^2 + x_1^5$tem um único ponto estacionario que não é minimizador local nem maximizador Local.

8. Encontre funções $f : I\!R^n \to I\!R$, $n \geq 2$ tais que $\nabla f(\bar{x}) = 0$ é $\bar{x}$ é

   - minimizador local
   - ponto sela
   - maximizador global

9. Para aproximar uma função g no intervalo $[0, 1]$ por um polinômio de grau $\leq n$ minimizamos a função critério:
$$f(a) = \int_0^1 [g(x) - p(x))]^2 dx$$
onde $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, encontre as equações a ser satisfeitas pelos coeficientes ótimos.

10. Considere o problema irrestrito

$$Minimizar \;\; f(x) = x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + e^(x_1 + x_2)$$

- Escreva as condições de necessárias de primeira ordem. São. suficientes ? Porque?
- o ponto $\bar{x} = (0,0)$ é ótimo ?
- Ache uma direção $d \in I\!R^2$ tal que $nabla f(\bar{x})^T d < 0$
- Minimize a função a partir de $\bar{x}$ na direção obtida em (c)

11. Seja $f : I\!R^2 \to I\!R$ dada por $f(x) = \frac{x_1^2+x_2^2}{e^{x_1^2+x_2^2}}$ Encontre os pontos estacionários, são minimizadores globais?

12. Seja $F : I\!R^n \to I\!R^n$ com derivadas continuas. Seja $f(x) = \|F(x)\|^2$. Seja x^* um minimizador local de f tal que $J_F(x^*)$ é não singular. Prove que x^* é a solução do sistema $F(x^*) = 0$.

13. Considere a função $f : I\!R^n \to R$, $f(x) = (x_1^3 + x_2)^2 + 2(x_2 - x_1 - 4)^4$. Dado um ponto $x \in I\!R^2$ e uma direção $d \neq 0$, $d \in I\!R^2$., construímos a função

$$g(t) = f(x + td)$$

==

- obtenha a expressão explicita de $g(t)$
- para $x = (0,0)$ e $d = (1,1)$ encontre o minimizador de g.

14. Considere a função $f(x) = (x_1 - 1)x_2$. Considere os pontos de $I\!R^2$ da forma $\tilde{x} = (1, x_2)$.

- Analise as condições de otimalidade de primeira e segunda ordem para esses pontos.
- O que se pode afirmar de $\tilde{x}$ usando essas informações ?
- Use a expressão da função para obter informações mais conclusivas sobre as características de$\tilde{x}$

15. Seja $f(x) = \frac{1}{2}x^TQx + b^Tx + c$, com $Q = Q^T$ definida positiva. Dado x_0 e d Achar

- λ tal que λ seja o minimizador de $\phi(\lambda) = f(x_0 + \lambda d)$
- Achar o $\bar{x}$ tal que seja o minimizador de $\phi(\lambda) = f(x_0 + \lambda d)$

16. Seja $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x$, com $Q = Q^T$ definida positiva sejam $x_0, x_1, \ldots x_n$ vetores de $I\!R^n$ definimos $\delta_i = x_i - x_0$ e $\gamma_i = \nabla f(x_i) - \nabla f(x_0)$, provar que se os vetores δ_i são linearmente independentes, então

$$x_* = x_n - [\delta_1 \ldots \delta_n][\gamma_1 \ldots \gamma_n]^{-1} \nabla f(x_n)$$

é minimizador global único de f.

17. Definimos a norma de Frobenius de $A \in I\!R^{m \times n}$ como

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Achar a Matriz simétrica mais próxima de $A \in I\!Rn \times n$ na norma de Frobenuius. (ie Achar B simétrica tal que $A - B\|_F$ seja minima)