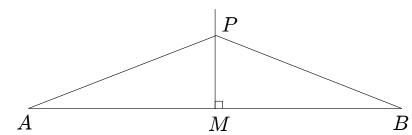
TRIÂNGULOS - Segmentos e Pontos Notáveis

Aloísio Freiria Neves [*][†]
Professor do IMECC-UNICAMP Aposentado

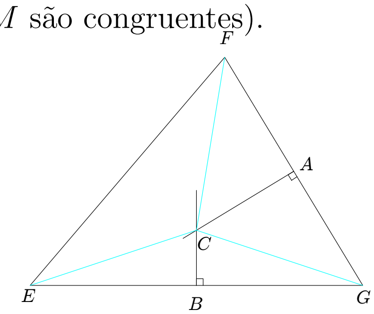
A motivação para redigir o texto veio da pergunta. Como entender e guardar os nomes dos pontos relacionados aos triângulos: Circuncentro, Ortocentro, Baricentro e Incentro? A motivação veio também por não ter encontrado um texto completo, com os casos e as respectivas justificativas.

O texto estuda os 4 casos citados acima. As definições e as justificativas estão acompanhadas por figuras que visam ilustrar e facilitar o entendimento. Assumimos que o leitor tenha conhecimento sobre congruência e semelhança de triângulos.

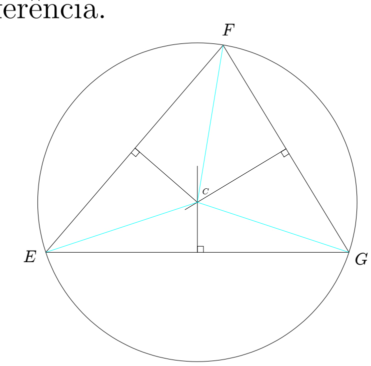
1. Mediatriz e Circuncentro



Chamamos de Mediatriz de um segmento AB o segmento ou a reta que é perpendicular a AB e que passa pelo seu ponto médio, veja figura ao lado. Também podemos definir como sendo o lugar geométrico dos P que são pontos equidistantes dos extremos do segmento A e B (pois os triângulos APM e BPM são congruentes).



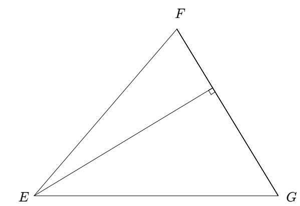
Vamos mostrar que as mediatrizes de um triângulo se encontram num mesmo ponto. Para isso considere duas mediatrizes arbitrárias e seja C o seu ponto de encontro, veja figura ao lado. Como C pertence às duas mediatrizes, temos pela definição de mediatriz, que C é equidistante de E e G e também de F. Então podemos afirmar que C também é ponto da terceira mediatriz (pois é equidistante dos vértices E e F), e também que C é o centro da circunferência que passa pelos três vértices, veja figura abaixo. O ponto C é chamado **Circuncentro** por ser o centro dessa circunferência.



[*]Ao meu neto Ivan

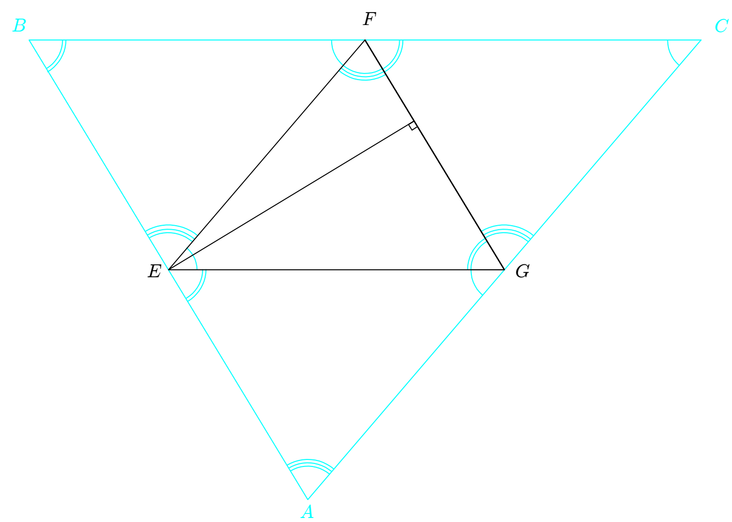
[†]E-mail: aloisio@unicamp.br ou nevesaloisio@gmail.com

2. Altura e Ortocentro



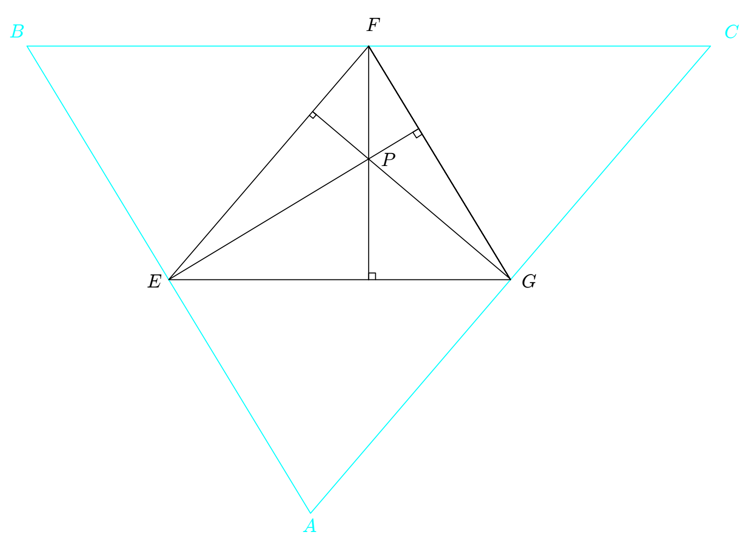
Chamamos de Altura de um triângulo o segmento traçado de um vértice perpendicularmente ao lado oposto.

Vamos mostrar que as alturas de um triângulo também se encontram num mesmo ponto. Para isso vamos construir um triângulo maior (em verde na figura abaixo) traçando pelos vértices do triângulo retas paralelas ao seu lado oposto, de forma que o triângulo maior ABC obtido tenha os lados paralelos ao lados do triângulo menor EFG,



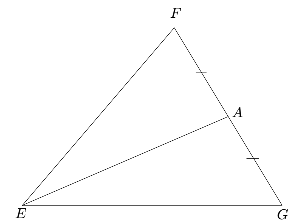
A figura obtida tem 5 triângulos todos congruentes. O paralelismo existente na figura forma vários paralelogramas, que podem ser utilizados para justificar as congruências, por exemplo, do paralelograma $BFGE$, temos que FG é congruente a BE e FE é congruente a CG,... assim por diante. Os ângulos congruentes estão anotados na figura, verifique essas congruências.

Usando a congruência dos triângulos e o paralelismo temos que os pontos E, F e G são os pontos médios dos lados do triângulo grande ABC, e o mais importante **as alturas do triângulo pequeno coincidem com as mediatrizes do triângulo grande**. Como sabemos da seção anterior que as mediatrizes de um triângulo se encontram num ponto, então as alturas também se encontram nesse mesmo ponto. Abaixo a figura completa



O ponto P de encontro das alturas é chamado de **Ortocentro** e pode ser guardado lembrando que "orto" está associado a ângulo reto.

3. Mediana e Baricentro



Chamamos de Mediana o segmento que une um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto, veja a figura ao lado. Mostraremos como nos casos anteriores que as três medianas se encontram num mesmo ponto. Mostraremos também que esse ponto divide as medianas na proporção 2 para 1, ou seja, divide em duas partes sendo uma parte o dobro da outra. Esse ponto comum às três medianas é chamado de Baricentro. O termo "bari" tem origem grega e significa peso, é usado em termos como barimetria (medida do peso, ou da gravidade), bariatra (especialista em obesidade).

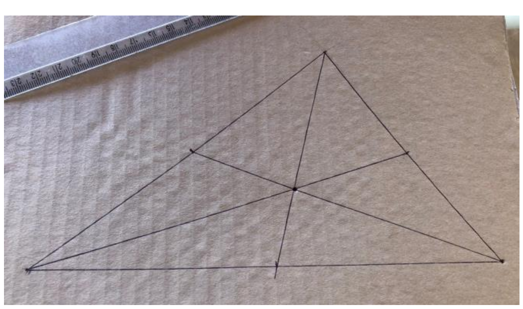
Vamos fazer um parênteses para explicar o por quê do nome Baricentro. Suponha que dois garotos vão brincar na gangorra de um parque e que a gangorra está equilibrada, se colocada na horizontal ela permanece nessa posição sem se inclinar para nenhum dos lados. Temos que todo o peso da gangorra está concentrado no ponto onde está o eixo, esse ponto é chamado de centro de massa, centro de gravidade ou centro de equilíbrio.

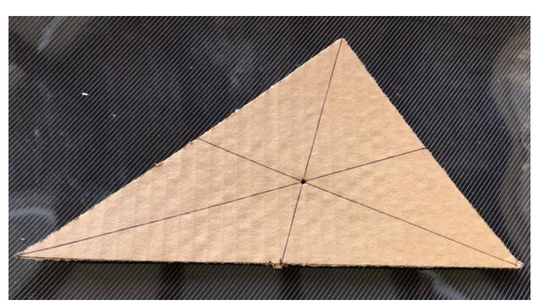
Quando os garotos sobem na gangorra ela abaixa do lado do garoto mais pesado, o centro de massa muda, fica mais próximo do garoto mais pesado. Para determinar esse novo ponto precisamos ir mudando o eixo para o lado do garoto mais pesado até encontrar a nova posição de equilíbrio.

No caso de figuras planas ou placas o centro de massa recebe ainda outros nomes como centróide ou centro geométrico. Supomos nesses casos que a figura ou a placa é homogênea, isto é, sua massa está distribuída igualmente por toda a sua área.

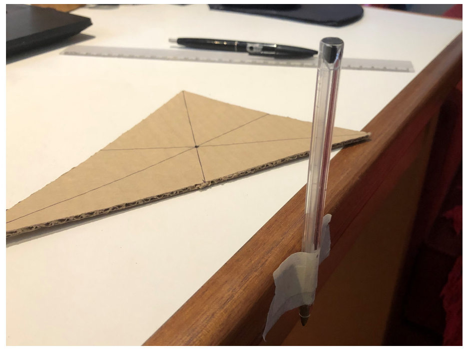
O centro de massa dos triângulos é o ponto de encontro das medianas e essa é a razão do nome Baricentro. A definição Matemática de centro de massa e a justificativa de que o Baricentro é realmente o centro de massa no caso dos triângulos foge do contexto desse texto. O que podemos fazer é propor aos alunos(as) e/ou leitores(as) um experimento simples para verificar o triângulo se mantém equilibrado quando apoiado no seu Baricentro.

Desenhe um triângulo num pedaço de papelão, trace as 3 medianas e depois recorte o triângulo. Veja as fotos abaixo

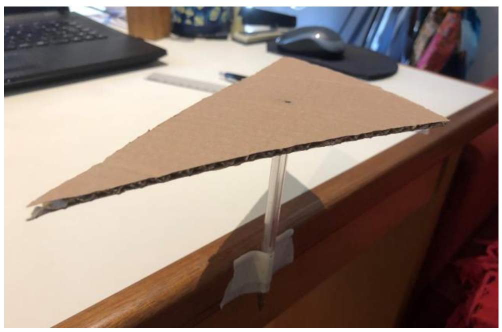


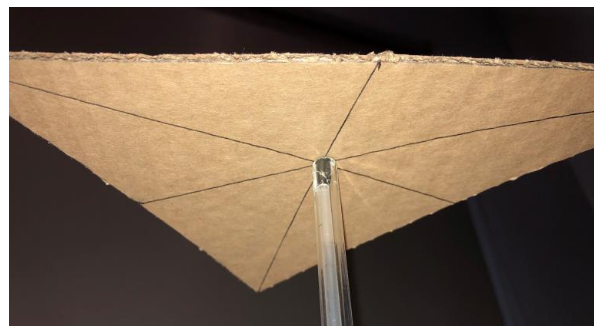


Agora construa um ponto de apoio, aqui usamos uma caneta BIC presa la lateral da mesa com fita crepe



Agora coloca o triângulo sobre o apoio com o lado das linhas para baixo, vai mudando o triângulo de posição até que fique equilibrado horizontalmente. Quando conseguir olhe o lado de baixo do triângulo e verifique se o ponto de apoio está no ponto de encontro das medianas. É importante que cada um faça o seu experimento e verifique o que acontece, e não só olha as fotos.

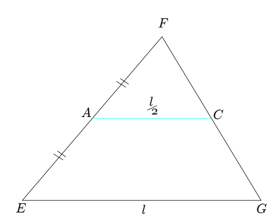




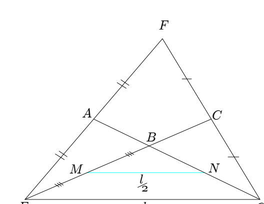
O experimento que fizemos é simples, fácil de fazer e sem muita precisão, mas mesmo assim é possível convencer quem o realiza de que o Baricentro é o centro de massa dos triângulos. De modo geral utilizar experimentos manuais para justificar resultados teóricos, ou aplicar resultados teóricos em experimentos manuais, facilita e entendimento e fixa o conhecimento. A satisfação boa que vem com o sucesso do experimento motiva e aguça a curiosidade para novos conhecimentos.

Vamos justificar agora que o ponto de encontro das medianas divide essas medianas na proporção 2 para 1, isto é, uma das partes é o dobro da outra . Vamos mostrar também que as 3 medianas se encontram num mesmo ponto.

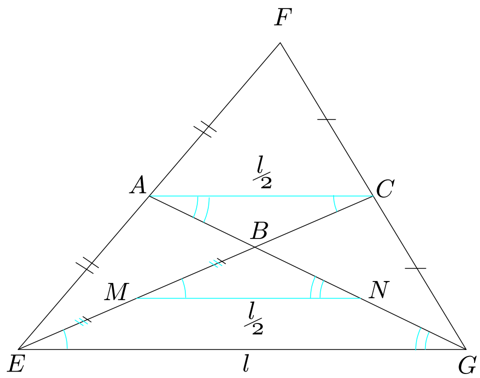
Considere um triângulo arbitrário EFG e escolha um de seus lados. Escolhemos o lado EF, veja figura ao lado. Ligue o ponto médio de EF ao lado FG por a um segmento paralelo a EG (em verde na figura). Temos dois triângulos semelhantes EFG e AFC (os três ângulos são congruentes), portanto, como EF é o dobro de AF, temos que EG também é o dobro de AC, como aparece na figura.



Considere agora a mediana AG e uma outra qualquer, escolhemos a mediana EC, veja figura ao lado. Sejam B o ponto de encontro dessas medianas e M o ponto médio de EB. Trace o segmento MN paralelo a EG (em verde) que liga EB a BG. Temos que os triângulo EBG e MBN são semelhantes (ângulos congruentes), e que EB é o dobro de $MB = EM$, portanto EG também é o dobro de MN, como na figura.



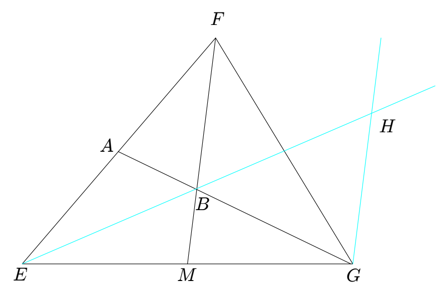
Juntando as informações que já obtivemos numa mesma figura obtemos



Os triângulos ACB e MBN são congruentes, pois os lados AC e MN são congruentes (medem $\frac{l}{2}$) e (usando ângulos alternos e internos) os ângulos assinalados em verde são congruentes. Temos então que $AB = BN = NG$ e $CB = BM = ME$ e portanto o ponto B divide as medianas na proporção 2 para 1.

A conclusão de que as 3 medianas se encontram num mesmo ponto também segue desse argumento. Se ao invés de escolhermos a mediana AG como fizemos, escolhermos a outra mediana (que passa por F) e repetirmos o mesmo argumento, valor mostrar que o ponto de encontro dessas medianas também divide AG na proporção 2 para 1, portanto esse ponto é o mesmo B.

É comum em Matemática encontrarmos resultados com várias demonstrações diferentes. O teorema de Pitágoras por exemplo tem mais de 350 provas diferentes. Aqui vamos apresentar uma demonstração diferente da que fizemos no caso do Baricentro utilizando somente semelhança e congruência de triângulos, portanto todos podem acompanhar. Considere duas medianas AG e FM e seja B seu ponto de encontro, veja a figura abaixo.



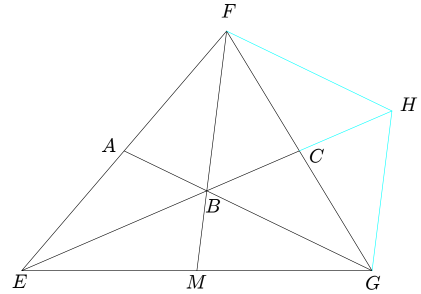
Trace duas retas (em verde na figura) uma que passa pelos pontos E e B e outra que passa por G e é paralela à FM. Seja H o ponto de intersecção dessas duas retas. Vamos mostrar que a reta EB corta o segmento FG no seu ponto médio e assim justificar o que queremos.

Como os triângulos EBM e EHG são semelhantes então

$$\frac{EH}{EB} = \frac{EG}{EM} \quad \Rightarrow \quad \frac{EH}{EB} - 1 = \frac{EG}{EM} - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{EH-EB}{EB} = \frac{EG-EM}{EM} \Rightarrow$$
$$\frac{BH}{EB} = \frac{MG}{EM}$$

Como $EM = MG$, temos, pela igualdade acima que $EB = BH$, ou seja, B é ponto médio de EH.

Trace agora o segmento FH, veja figura ao lado. Vamos mostrar que $BFHG$ é um paralelogramo. Como as diagonais de um paralelogramo se cruzam no ponto médio, teremos que C será o ponto médio do lado FG, como queremos.



Observe que os triângulos EAB e EFH são semelhantes, têm o mesmo ângulo no vértice E e dois lados proporcionais: $EF - 2EA$ e $EH = 2EB$, então os segmentos AB e FH são paralelos, o que implica que $BFHG$ é um paralelogramo.

Resta mostrar que o Baricentro divide a mediana na proporçao 2 para 1. Como a notação da figura acima temos de mostrar que

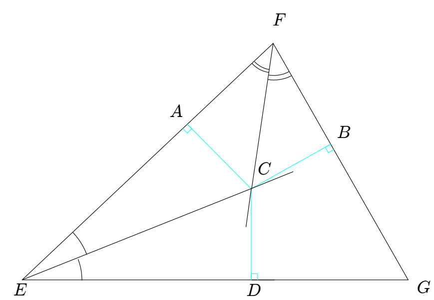
$$\frac{FB}{BM} = \frac{2}{1}. \tag{1}$$

Usando novamente a semelhança dos triângulos EBM e EHG e ainda que $EH = 2EB$, podemos escrever que $\frac{HG}{BM} = \frac{EH}{EB} = 2$. Como $HG = FB$, obtemos $\frac{FB}{BM} = \frac{HG}{BM} = 2$.

4. Bissetriz e Incentro

Chamamos de Bissetriz o segmento que divide um ângulo ao meio. Como nos outros casos vamos mostrar que as 3 bissetrizes se encontram num mesmo ponto.

Trace as bissetrizes dos vértices E e F e chame de C seu ponto de intersecção, veja a figura ao lado. Trace também os 3 segmentos (em verde) partindo de C e perpendicular aos lados. Observe que os triângulos EAC e ECD são congruentes, e também os triângulos AFC e FBC, então os segmentos em verde são congruentes, logo o segmento CG é a bissetriz do vértice G, e portanto C é o ponto de encontro das 3 bissetrizes.



O ponto C é chamado de **Incentro** vem do fato de ser o centro da circunferência inscrita no triângulo, veja a figura abaixo.