A Razão Áurea com Régua e Compasso

Aloísio Freiria Neves *†

Professor do DM-UNICAMP Aposentado

Prefácio

Por que escrever um texto sobre a Razão Áurea usando régua e compasso se os computadores são mais eficientes, e o uso do compasso é considerado em algumas Escolas perigoso? A resposta pode vir de outra resposta. Os computadores realmente substituem os equipamentos de desenho em termos de aprendizagem? Esse é um dos temas da Introdução abaixo.

A motivação para escrever veio depois que fui (durante o Spring-Break) visitar minha filha na França, ela estava em Pós-Doc e meu neto (para o qual esse texto está dedicado) estava na escola pública. Quando cheguei a primeira coisa que meu neto me pediu foi ensiná-lo a usar o compasso, era usado na escola e ele nunca tinha usado, nem tinha um compasso. A primeira coisa que fizemos foi comprar um compasso, e durante alguns dias usamos o compasso para fazer várias figuras. Ele pegou gosto pelo compasso e o usa para várias atividades.

O texto desenvolve o tema Razão Áurea à partir da sua definição original dada por Euclides (sec.III, aC), e a utiliza para motivar o ensino e a aprendizagem de métodos de desenho geométrico com régua e compasso.

1. Introdução

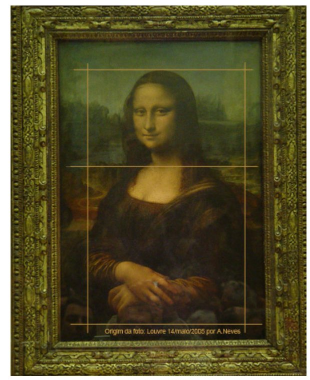
Talvez a busca da beleza e da estética levou Euclides (sec.III aC) a dar a primeira definição de razão áurea ou proporção divina, o valor dessa proporção é conhecido como número de ouro e é denotado pela letra grega ϕ (leia-se fi).

Essa razão harmoniosa, que define a relação entre os comprimentos de dois segmentos, é reconhecida e usada desde a antiguidade por artistas, pintores, arquitetos, historiadores, biólogos, matemáticos e muitos outros como forma

*Ao meu neto Ivan

†E-mail: aloisio@unicamp.br ou nevesaloisio@gmail.com

esteticamente perfeita. Como exemplo colocamos ao lado uma foto do famoso quadro Monalisa (ou Gioconda), onde incluímos um retângulo que tem o objetivo de mostrar a relação áurea existente entre sua cabeça e seu tronco. Relações áureas são facilmente encontradas no corpo humano (veja o Homem Vitruviano), em construções (veja o Parthernon), em obras de arte (veja as pinturas renascentistas), na geometria (veja esse texto). Ela aparece em fenômenos que aparentemente não têm relação entre si. É uma relação simples e que cativa a todos.



O texto desenvolve o tema razão áurea desde a definição original dada por Euclides, e apresenta métodos de construção de figuras com régua e compasso. Tem ainda o objetivo de motivar o ensino de geometria, e o uso de instrumentos de desenho (régua, compasso, transferidor, esquadros, etc) no ensino elementar e médio. Podemos dizer que nesse texto no texto, o compasso é o protagonista, a régua o coadjuvante, e a razão áurea é o enredo.

Todos os métodos e figuras apresentadas são acompanhadas de justificativas teóricas e descrições dos métodos de construção. Entendemos que não é possível aprender desenho sem desenhar, portanto incentivamos o leitor a refazer os desenhos com as próprias mãos, pois dessa forma irão observar com mais detalhes a beleza e as simetrias das formas.

O desenho geométrico pode ser olhado como a forma de ilustrar artisticamente resultados matemáticos. Essa possibilidade de desenhar resultados teóricos ajuda no desenvolvimento intelectual e na fixação de conhecimentos. Desenhar a mão desenvolve a firmeza, precisão, organização, limpeza, capricho e coordenação motora. Essas habilidades ajudam nas tarefas do dia a dia, a escrever em letra cursiva, a manipular ferramentas com segurança e precisão, e também desenvolve habilidades necessárias para profissões como: artistas plásticos, restauradores de obras de arte, escultores, dentistas, médicos cirurgiões, entre outros. Vamos encerrar esse parágrafo, que essencialmente busca motivar o uso das mãos, com a seguinte frase: *"o fazer com as próprias mãos, por si só, gera satisfação e prazer"*.

Encerraremos essa introdução reforçando o fato de que a geometria e as construções geométricas são indissociáveis, e que juntas despertam nos estudantes o interesse por justificativas e provas, que é o primeiro passo para adquirir o gosto pela Matemática.

2. A Razão Áurea

Como dissemos na introdução a busca da beleza e da estética levou Euclides (um dos fundadores da geometria, anos 300 aC) a dar a seguinte definição de divisão em *média e extrema razão*:

"Um segmento de reta se diz dividido em média e extrema razão, se a razão entre o maior e o menor dos segmentos é igual à razão entre o segmento todo e o maior".

Essa noção de média e extrema razão é hoje conhecida como *razão áurea ou razão divina*. De acordo com a definição dada por Euclides, para dividir um segmento AB de comprimento ℓ numa razão áurea, temos que encontrar um ponto $\mathscr{A}$, que chamaremos de *Ponto Áureo*, que divide o segmento dado em dois segmentos que satisfazem a definição de Euclides. Se a é o comprimento da parte maior (veja a Figura 1),

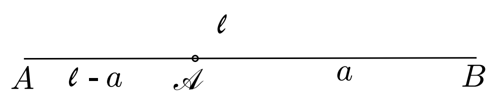


Figura 1: Razão Áurea

então $\mathscr{A}$ divide o segmento AB numa razão áurea se

$$\frac{a}{\ell - a} = \frac{\ell}{a}. \tag{2.1}$$

O valor dessa razão é denotado pela letra grega ϕ (leia-se fi),

$$\frac{a}{\ell - a} = \frac{\ell}{a} = \phi. \tag{2.2}$$

O número ϕ é chamado de *número de ouro ou valor áureo*. O segmento a, é chamado de *segmento áureo* de ℓ, e $(\ell - a)$ é segmento áureo de a, mais claramente, os segmentos que aparecem no denominador de (2.2) são chamados de segmentos áureos dos respectivos segmentos que aparecem no numerador.

O presente texto tem a intenção de ser didático e acessível a leitores com conhecimentos básicos em Matemática como o Teorema de Pitágoras e as Equações do Segundo Grau. Com a finalidade de orientar o leitor, incluímos alguns comentários sobre procedimentos geralmente utilizados por estudantes para facilitar o entendimento de um determinado problema, por exemplo, o seguinte roteiro é comumente adotado: procurar entender a definição; guardar os nomes e a nomenclatura; procurar exemplos que satisfaçam a definição; verificar se o problema tem existência de solução e se a solução é única; representar ou esboçar geometricamente a solução; buscar aplicações, e outros. No tema deste texto, razões áureas, vamos seguir o roteiro acima, vamos supor que já entendemos a definição e já sabemos a nomenclatura, temos então que procurar por exemplos de valores de ℓ e a que satisfaçam (2.1), mas esses valores não são fáceis de serem determinados, principalmente para aqueles que ainda não têm conhecimentos sobre esse tema, pois nele aparecem números irracionais.

Vamos portanto estudar a existência de solução e depois a unicidade da razão áurea, ou equivalentemente, a existência e a unicidade do valor ϕ. Dividindo o numerador e o denominador da fração esquerda de (2.2) por a, obtemos

$$\frac{1}{\frac{\ell}{a}-1}=\frac{\ell}{a}.$$

Como $\frac{\ell}{a}=\phi$, temos que

$$\frac{1}{\phi-1}=\phi \quad \Leftrightarrow \quad 1=\phi^2-\phi.$$

Então ϕ deve satisfazer a equação de segundo grau

$$\phi^2-\phi-1=0. \tag{2.3}$$

Resolvendo essa equação encontramos dois valores para ϕ

$$\phi=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Como $\phi>0$, pois ℓ e a são comprimentos de segmentos e portanto positivos, o sinal negativo da fórmula acima não serve, portanto ϕ é único e satisfaz

$$\frac{\ell}{a}=\phi=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\sim 1,618. \tag{2.4}$$

Temos portanto que dado o valor do denominador a sabemos que o valor do numerador é $\ell=\phi a$, onde ϕ é o valor dado em (2.4). Com esse valor de ϕ, podemos construir exemplos de razões áureas e também formas geométricas que são áureas ou aproximadamente áureas, por exemplo, se construirmos uma janela retangular com largura igual a 1m e altura igual a $1,6$m teremos uma janela que é aproximadamente áurea, logo podemos considerá-la como esteticamente perfeita.

Queremos agora estudar o caso contrário, onde é dado o valor da altura da janela e queremos saber a sua largura, isto é, dado o valor de ℓ e queremos encontrar o valor de a. Nesse caso

$$a=\frac{1}{\phi}\ell.$$

O valor de $1/\phi$ pode ser calculado usando o valor de ϕ dado em (2.4) e fazendo a divisão, ou dividindo a equação (2.3) por ϕ

$$\phi - 1 - \frac{1}{\phi} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\phi} = \phi - 1,$$

e depois usando o valor de ϕ dado em (2.4). Assim obtemos que

$$\frac{1}{\phi} = \phi - 1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 1 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \sim 0,618. \tag{2.5}$$

Usando a nomenclatura dada na seção anterior e os valores obtidos em (2.4) e (2.5) podemos afirmar que um segmento de comprimento $(1+\sqrt{5})/2$ tem segmento áureo de comprimento 1 e um segmento de comprimento 1 tem segmento áureo de comprimento $(-1+\sqrt{5})/2$.

Observe que os valores de ϕ e $1/\phi$ dados respectivamente em (2.4) e (2.5) são obtidos somando $1/2$ ou subtraindo $1/2$ a $\sqrt{5}/2$. Usaremos esse fato mais à frente.

Na introdução dissemos que a importância da razão áurea vem do fato de ser encontrada na natureza, no corpo humano, em obras de arte, na geometria, etc. Agora que conhecemos em detalhes a sua definição, podemos comprová-la. Divida sua altura pela distância do seu umbigo até o chão, e verifique se dá aproximadamente $1,6$. Procure no seu corpo outras relações áureas, use o Homem Vitruviano de Leonardo da Vinci para orientá-lo, ou em objetos ao seu redor, como por exemplo as dimensões de um cartão de crédito. Além do corpo humano a razão aparece no Parthernon e nas pirâmides (Grécia), nas obras de Leonardo da Vinci como a Monalisa ou Gioconda, nas colméias das abelhas, no crescimento de coelhos, na sequência de Fibonacci, em várias figuras geométricas, no sólido Platônico Icosaedro, entre outros. Esses são temas interessantes para sua pesquisa.

3. Construções com Régua e Compasso

O compasso é um dos mais antigos instrumento de desenho, é utilizado para traçar arcos de círculos, transferir medidas, construir ângulos e resolver problemas geométricos. A ponta metálica, usualmente chamada de ponta seca, tem a forma de agulha e fica fixa no papel, enquanto a outra dotada de grafite ou de uma caneta se movimenta para traçar arcos de circunferências, para marcar pontos ou distâncias.

Para simplificar as notações do texto, sempre que não houver perigo de confusão, identificaremos os segmentos usando a notação na forma $\mathscr{A}B$ ou simplesmente a. Vamos iniciar com um pequeno aquecimento. Vamos comentar dois métodos básicos de construções geométricas: métodos para desenhar retas perpendiculares e retas paralelas. Dada um reta r e um ponto P em r, suponha que queiramos construir uma reta s perpendicular a r e passando por P.

Descrição do método de construção: trace com a régua uma reta r e assinale um ponto P. Com a ponta seca em P e uma abertura qualquer trace os pontos A e B, sem alterar a abertura do compasso durante o procedimento. Agora com uma abertura um pouco maior e a ponta seca nos pontos A e B determine o ponto X acima de P, aqui também a abertura deve ser mantida fixa. Una com a régua o ponto X ao ponto P, essa é reta perpendicular procurada.

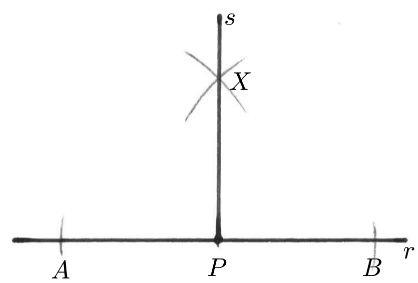


Figura 2: Perpendicular

Justificativa: os triângulos AXP e PXB são congruentes, pois seus respectivos lados foram construídos sem alterar a abertura do compasso. Logo os ângulos internos desses dois triângulos no vértice P são iguais e somam 180^o, portanto esses dois ângulos são iguais a 90^o, e portanto as retas são perpendiculares.

Agora vamos considerar uma reta r e um ponto P fora de r. Queremos desenhar uma reta s paralela a r e que passe por P.

Descrição do método de construção: comece traçando uma reta r e marque um ponto P fora de r. Abra o compasso com uma abertura maior que a distância de P a r. Você vai utilizar essa abertura durante todo o processo, portanto não mude essa abertura. Com a ponta seca em P trace um arco que começa próximo da reta r, corta r em dois pontos, estenda o arco até aproximadamente 180^o, chame o primeiro ponto de intersecção do arco com a reta r de A, como na figura 3. Com a ponta seca em A trace um arco desde o ponto P até encontrar a reta r, chame esse ponto de C. Com a ponta seca em C marque o ponto B no primeiro arco, veja a figura 3. Agora una o ponto B com o ponto P para obter a reta s procurada.

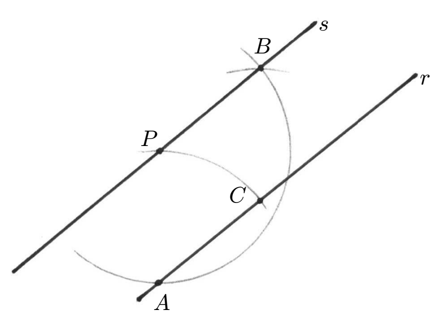


Figura 3: Paralelas

Justificativa: a pergunta natural é por que a reta é paralela? E a resposta é porque $APBC$ é um paralelogramo. Os comprimentos dos segmentos AP, PB, BC e CA são todos iguais à abertura do compasso escolhida no início da construção do desenho, daí a importância de não se alterar a abertura do compasso durante a execução da figura.

4. O Segmento Áureo

O objetivo é construir com régua e compasso o segmento áureo como foi definido na seção 2. Como vimos naquela seção precisamos de um método geométrico que forneça segmentos de comprimentos

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

O primeiro método é apresentado na Figura 4.

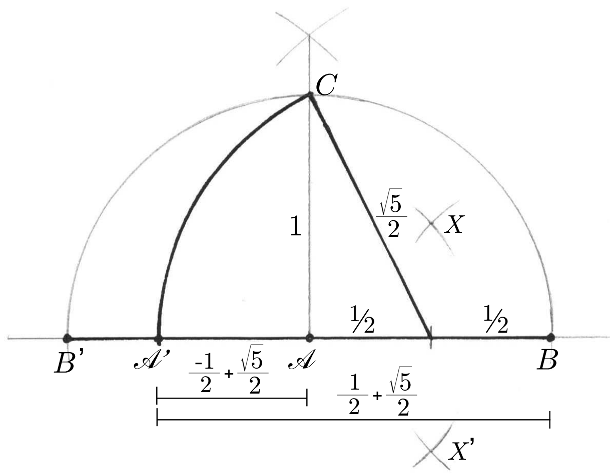


Figura 4: Segmento Áureo

Descrição do método de construção: trace uma reta e um marque nessa reta um segmento arbitrário $\mathscr{A}B$, que consideraremos de comprimento 1. O método visa encontrar o Ponto Áureo $\mathscr{A}'$. Com a ponta seca do compasso em $\mathscr{A}$ e abertura igual a 1, trace um arco que se inicia em B e vai até encontrar o ponto B', veja a figura. Usando o método de construção de perpendiculares, construa uma reta perpendicular que passa por $\mathscr{A}$. Agora vamos dividir o segmento $\mathscr{A}B$ ao meio, abra o compasso com uma abertura maior que $1/2$, com a ponta seca em $\mathscr{A}$ trace pequenos arcos acima e abaixo da reta e depois faça a mesma coisa com a ponto seca em B, chame os pontos de intersecção desses pequenos arcos de X e X', como na figura. Coloque a régua nos pontos X e X' e marque o ponto médio do segmento $\mathscr{A}B$. Com a ponta seca no ponto médio abra o compasso até o ponto C e trace o arco até encontrar no ponto $\mathscr{A}'$, como queríamos.

Justificativa: a justificativa é baseada nas fórmulas (2.4) e (2.5). Dado um segmento $\mathscr{A}B$ de comprimento 1, precisamos construir segmentos de comprimentos $1/2$ e $\sqrt{5}/2$. O segmento de comprimento $1/2$ é fácil, basta dividir o segmento de comprimento 1 ao meio, como fizemos. Para o segmento de comprimento $\sqrt{5}/2$ vamos utilizar o teorema de Pitágoras, que diz que a hipotenusa de triângulo retângulo é igual à raiz quadrada da soma dos quadrados dos catetos, portanto um triângulo retângulo de catetos 1 e $1/2$, tem hipotenusa h igual a

$$h = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

que é o comprimento que precisamos. O método portanto se resume em dividir o segmento de comprimento 1 ao meio e construir o triângulo retângulo de catetos 1 e $1/2$ como foi feito na figura. Feito isto, transferimos com o compasso o comprimento $\sqrt{5}/2$ para a reta para encontrarmos o ponto $\mathscr{A}'$. Para completar a justificativa basta verificar que o segmento $\mathscr{A}'B$ tem comprimento $1/2 + \sqrt{5}/2$, que é o caso dado em (2.4); e que o segmento $\mathscr{A}'\mathscr{A}$ tem comprimento $-1/2 + \sqrt{5}/2$, que é o caso dado em (2.5).

Os pontos $\mathscr{A}$ e $\mathscr{A}'$ da figura 4 são Pontos Áureos, $\mathscr{A}$ é Ponto Áureo do segmento $\mathscr{A}'B$, e $\mathscr{A}'$ é Ponto Áureo do segmento $B'A$, portanto $\mathscr{A}B$ é o segmento áureo de $\mathscr{A}'B$, e $\mathscr{A}'\mathscr{A}$ é o segmento áureo de $B'\mathscr{A}$.

Outro método utilizado para construção de segmentos áureos é apresentado na Figura 5

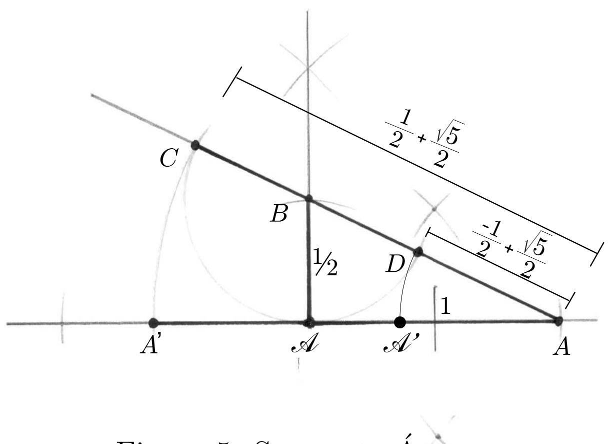


Figura 5: Segmento Áureo

Descrição do método de construção: suponha que $\mathscr{A}A$ tenha comprimento 1. Divida esse segmento ao meio (como fizemos acima), depois construa a perpendicular e o triângulo retângulo $A\mathscr{A}B$ de catetos 1 e $1/2$, veja a figura 5. A hipotenusa desse triângulo mede $\sqrt{5}/2$. Como sabemos para construir os segmentos áureos precisamos adicionar ou subtrair um segmento de comprimento $1/2$ a essa hipotenusa. Para isso, aumente o comprimento da hipotenusa, coloque a ponta seca do compasso em B e abra o compasso até $\mathscr{A}$, o compasso fica com abertura igual a $1/2$, agora basta girar o compasso e marcar os pontos C e D. Temos os segmentos áureos construídos. Para encerrar vamos transferir esses segmentos para o eixo horizontal. Com a ponta seca do compasso em A e abertura igual a AD e depois igual a AC marcamos os pontos A' e $\mathscr{A}'$. Podemos então afirmar que $\mathscr{A}'$ é Ponto Áureo de $\mathscr{A}A$ e $\mathscr{A}$ é Ponto Áureo de $A'A$.

5. O Retângulo Áureo

O Retângulo Áureo é considerado como esteticamente perfeito, é utilizado por artistas e arquitetos em projetos que buscam harmonia e beleza. Um retângulo é áureo se a razão entre o lado maior e o lado menor é áurea. Portanto, se a e ℓ forem respectivamente o lado menor e o lado maior, eles satisfazem a condição (2.1), isto é,

$$\frac{a}{\ell - a} = \frac{\ell}{a} = \phi.$$

Descrição do método de construção: iniciamos construindo o quadrado $A\mathscr{A}CD$ de lado igual a a, veja a figura. Depois utilizamos o método dado na figura 4 para construir (na vertical) o segmento $A\mathscr{A}'$ de comprimento ℓ. Temos que a é o segmento áureo de ℓ. Em seguida construimos o retângulo menor de lados $(\ell - a)$ e a. Os dois retângulos obtidos de lados $(\ell - a)$ e a e de lados a e ℓ são áureos, pois seus lados satisfazem a igualdade acima.

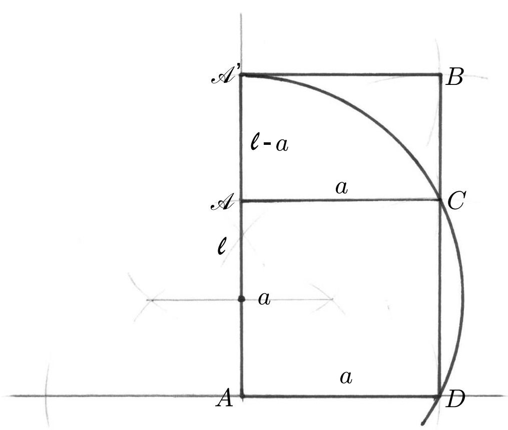


Figura 6: Retângulo Áureo

Observe na figura 6 que o retângulo áureo maior foi obtido acrescentando um retângulo áureo menor ao quadrado de lado a. Portanto, a partir de um Retângulo Áureo arbitrário pode-se construir outros retângulos áureos maiores ou menores, bastando para isso, acrescentar um quadrado para obter Retângulos Áureos maiores, ou retirar um quadrado para obter Retângulos Áureos menores, veja a Figura 7.

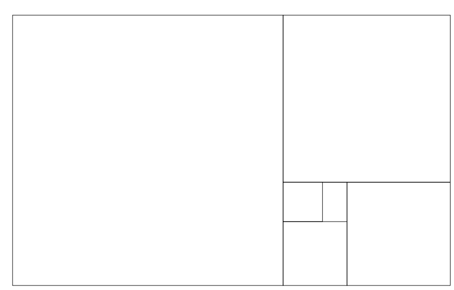


Figura 7: Retângulos Áureos

Uma importante curva que está relacionada com retângulos áureos e aparece frequentemente na literatura é a Espiral Logarítmica. Essa espiral pode ser construída facilmente a partir da Figura 7, acrescentando um arco de circunferência de 90^o em cada quadrado, veja a Figura 8.

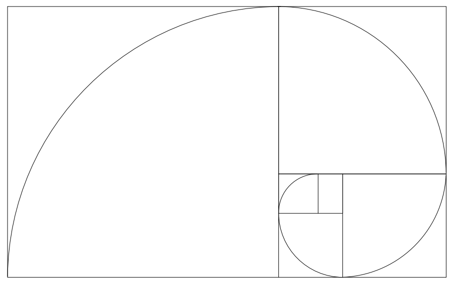


Figura 8: Espiral Logarítmica

6. O Triângulo Áureo

Dizemos que um triângulo isósceles é áureo, se a razão entre a medida dos lados maiores e a base é áurea.

Vamos desenhar um triângulo áureo supondo que é dado a medida a dos dois lados maiores, veja a Figura 9

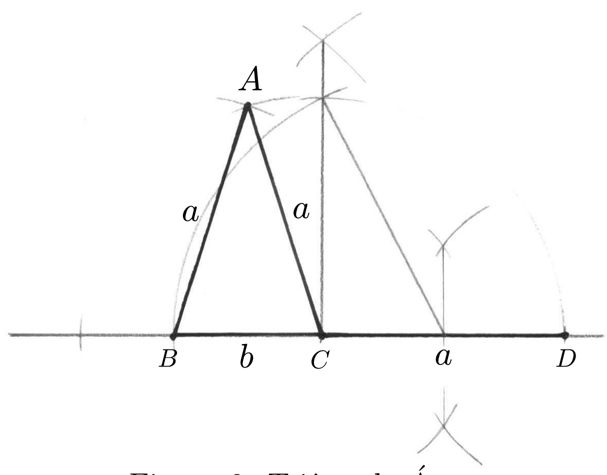


Figura 9: Triângulo Áureo

Descrição do método de construção: iniciamos construindo um segmento CD de comprimento a, depois utilizamos o método dado na Figura 4 para construir o segmento BC de comprimento b, que é o segmento áureo de a. Vamos repetir os detalhes dessa construção para facilitar o leitor. Com o compasso com abertura igual a a e com a ponta seca em B, e depois em C, marcamos o ponto A, agora basta ligar A aos pontos B e C para obter o triângulo.

Uma das primeiras curiosidades que aparece quando olhamos o triângulo áureo é sobre seus ângulos internos. Quanto valem? Como calculá-los? Uma estimativa aproximada pode ser obtida com um transferidor, podemos também usar o fato de que a razão áurea aparece naturalmente nas formas perfeitas, e então perguntar: será que b é lado de polígono regular? Vamos verificar primeiro geometricamente se esta pergunta pode ser verdadeira. Vamos colocar um triângulo áureo ao lado do outro e verificar se forma uma figura geométrica. Aqui cabe ressaltar que não conseguimos desenhar medidas exatas, sempre há um pequeno erro. Outro ponto que salientamos é que quando repetimos um determinado procedimento, por exemplo, colocando um segmento após o outro, estamos somando os pequenos erros, portanto o erro final fica maior. Com este fato em mente vamos construir uma figura colocando os triângulos um ao lado do outro, veja a Figura 10.

Descrição do método de construção e conjectura: iniciamos construindo um segmento AB, onde a é o seu segmento áureo, em seguida traçamos uma semicircunferência com centro em A e raio a, depois com a ponta seca do compasso em C e abertura igual a b marcamos o ponto da circunferência que dista b do ponto C, unindo os pontos construímos o primeiro triângulo (veja a figura 10), em seguida, com a mesma abertura do compasso, marcamos os outros pontos na circunferência para formar os outros triângulos. Após cinco pontos chegamos ao ponto E que está quase no eixo horizontal. Como a diferença é mínima, podemos supor que foi devido aos erros cometidos e que E está no eixo horizontal (isso será verificado com rigor abaixo). Portanto se continuarmos na parte debaixo com mais 5 triângulos, teremos um decágono (polígono de dez lados) inscrito numa circunferência de raio a, com lado igual a b (denotado por l_{10}). Assim o ângulo central do triângulo será $360^o/10 = 36^o$, e os outros dois são iguais a 72^o. Vamos justificar as suposições que fizemos.

Justificativa: vamos mostrar que um triângulo isósceles com ângulos internos iguais 36^o, 72^o e 72^o é um triângulo áureo, ou seja, se x é a medida dos dois lados maiores e y é a medida da base, então x e y satisfazem a condição (2.1),

$$\frac{y}{x-y} = \frac{x}{y}. \tag{6.1}$$

Observe primeiramente que $72^o/2 = 36^o$, então vamos iniciar construindo a bissetriz do ângulo da base. Com uma abertura de compasso menor que y marcamos os pontos Y e Y', depois com uma abertura maior e a ponta seca em Y, e depois em Y', marcamos o ponto X, agora com régua da direção de BX podemos traçar a bissetriz unindo o ponto B ao lado oposto do triângulo, no ponto D.

Observe que o triângulo BCD tem ângulos internos 36^o, 72^o e 72^o, logo é um triângulo isósceles, portanto o comprimento do lado BD é y, veja a Figura 11.

Agora observe que o triângulo ABD também é isósceles, pois os dois ângulos da base são iguais a 36^o, então o lado AD também mede y, consequentemente CD mede $x - y$.

Agora com todos os ângulos e medidas colocadas na Figura 11, vemos facilmente que os ângulos internos dos triângulos ABC e BCD são 36^o, 72^o e 72^o logo esses dois triângulos são semelhantes, portanto seus lados são proporcionais, isto é,

$$\frac{y}{x-y} = \frac{x}{y}.$$

Temos que (6.1) está verificada como queríamos.

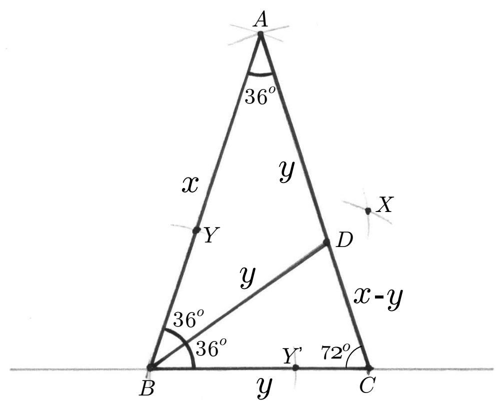


Figura 11: Justificativa

7. O Pentágono

O objetivo dessa seção é encontrar métodos de construção com régua e compasso de um Pentágono (polígono regular de 5 lados), e também estudar sua relação com a razão áurea. Na seção anterior vimos que a base do triângulo áureo é o lado l_{10} do decágono, portanto já temos um método de construção do decágono com régua e compasso. Outro polígono regular que podemos desenhar com régua e compasso é o hexágono, polígono de 6 lados, pois o lado l_6 do hexágono é igual ao raio da circunferência que o circunscreve. Os método estudado a seguir foi baseado no texto de Carlos Marmo e Nicolau Marmo [1].

7.1 Construção do Pentágono inscrito numa circunferência.

Suponha que queiramos construir um pentágono inscrito numa circunferência de raio $R = AB$, veja a figura abaixo.

Descrição do método de construção: Inicie o desenho construindo o segmento $AB = R$, trace a circunferência com centro em A e raio R.

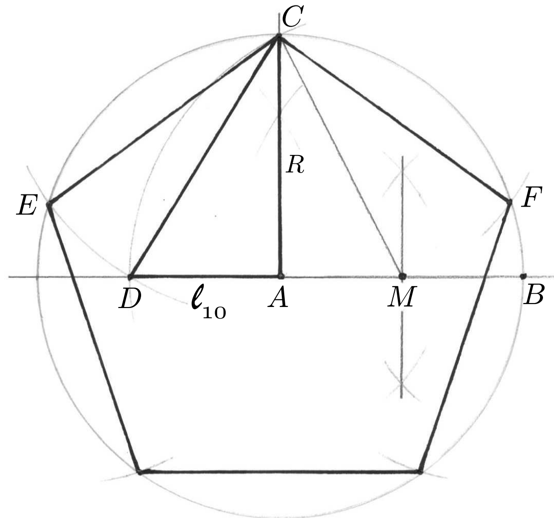


Figura 12: Pentágono - dado o Raio

Use o método de construção dado na Figura 9, para determinar o segmento $AD = \ell_{10}$, que é o segmento áureo de R. Desenhe o triângulo retângulo ACD; a hipotenusa CD desse triângulo é o lado l_5 do pentágono (vamos justificar essa afirmação abaixo). Portanto com o compasso com abertura igual a $CD = l_5$ e a ponta seca em C marcamos os vértices E e F, e depois com a mesma abertura no compasso marcamos os outros vértices, agora é só unir os vértices para obter o pentágono.

Por que o método funciona? Vamos responder a seguir.

Justificativa: já sabemos que o lado do decágono ℓ_{10} é o segmento áureo do raio R, portanto ℓ_{10} satisfaz

$$\frac{\ell_{10}}{R - \ell_{10}} = \frac{R}{\ell_{10}} \quad \Leftrightarrow \quad \ell_{10}^2 = (R - \ell_{10}) \, . \, R \tag{7.1}$$

Vamos utilizar esse igualdade no final da justificativa.

Como $360^o/5 = 72^o$, temos que o lado do pentágono l_5 é a base de um triângulo isósceles com ângulos internos 72^o, 54^o e 54^o, e onde o lado maior igual a R. Vamos justificar o método de construção do Pentágono mostrando que o comprimento da base desse triângulo é exatamente igual ao comprimento do segmento CD da Figura 12.

Começaremos construindo um ângulo de 72^o. A maneira que temos para construir esse ângulo é através do triângulo áureo, pois, como sabemos, seus ângulos da base são iguais a 72^o. Desenhe um segmento $AB = R$ e depois uma circunferência com centro em A e de raio R, em seguida construa o triângulo áureo ACD de base ℓ_{10} como foi feito na Figura 10. Temos o ângulo de 72^o construído, veja a Figura 13.

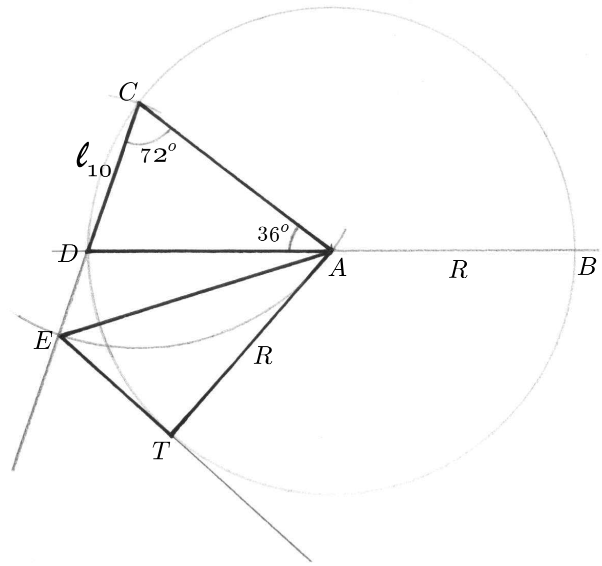


Figura 13: Justificativa

Para construir o triângulo isósceles de ângulos internos 72^o, 54^o e 54^o vamos alongar o segmento CD e com o compasso em C e abertura igual a $R = CA$ marcar o ponto E, o triângulo ACE é o triângulo isósceles procurado. A sua base AE é o lado do pentágono l_5. Em seguida vamos construir o triângulo retângulo AET da Figura 13. Trace um reta por E que seja tangente à circunferência, chame de T o ponto de tangência, una T a A para obter o triângulo retângulo AET. Para concluir a justificativa precisamos mostrar que o triângulo AET é congruente ao triângulo ACD da Figura 12, portanto suas hipotenusas têm a mesma medida. Os dois triângulos têm um cateto igual R, basta portanto mostrar que os outros dois catetos também são iguais, isto é, $ET = \ell_{10}$. Para isso vamos utilizar a *Potência de Ponto*, que diz: *se uma reta passa por um ponto P e intersecciona uma circunferência em dois pontos A e B, então o produto das distâncias $PA \,.\, PB$ é constante, não depende da reta.* A justificativa desse conceito está no Apêndice, no final do texto.

Na Figura 13 temos duas retas que passam por E e interseccionam a circunferência, uma delas intersecciona nos pontos D e C, e a outra é tangente em T, nesse caso os pontos de intersecção coincidem, então pela potência de ponto temos que

$$ET^2 = ED \,.\, EC,$$

e como $ED = R - \ell_{10}$ e $EC = R$, temos que

$$ET^2 = (R - \ell_{10}) \,.\, R$$

Portanto por (7.1) temos que $ET = \ell_{10}$ o que completa a justificativa.

7.2 Razão Áurea e o Pentágono.

Essa seção mostra a enorme relação existente entre as dimensões do Pentágono e a razão áurea. É uma relação que impressiona e cativa todos os interessados nesse tema.

Considere o Pentágono construído na seção anterior e trace as suas diagonais, veja a Figura 14.

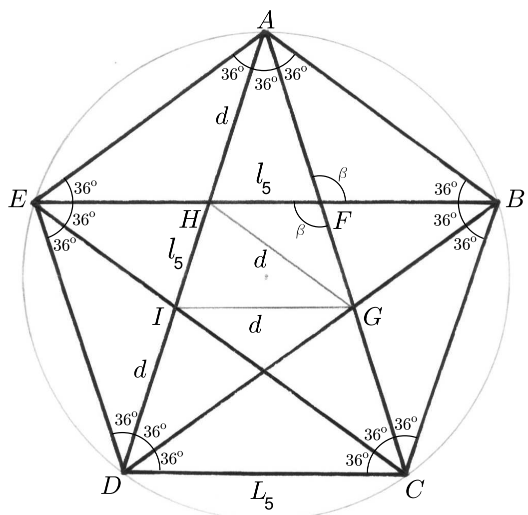


Figura 14: Razão áurea e o Pentágono

Vamos iniciar mostrando que os ângulos internos do Pentágono são iguais a 108^o. Como vimos na seção anterior, podemos construir um pentágono colocando lado a lado 5 triângulos isósceles de ângulos 72^o, 54^o e 54^o. O ângulo interno do Pentágono, que é formado por dois desses triângulos, é igual a $2\ .\ 54^o = 108^o$ (pode-se também usar a fórmula dos ângulos internos de um polígono).

O ponto principal para obter as relações áureas que procuramos é a verificação de que as diagonais do Pentágono dividem os ângulos internos do Pentágono em três ângulos iguais de 36^o cada um, veja a Figura 14. Essa verificação segue observando que os triângulos isósceles formados por dois lados consecutivos do Pentágono e a respectiva diagonal, ou seja os triângulos ABE, ABC, BCD, CDE e DEA, são todos isósceles e congruentes, com ângulos internos de 108^o, 36^o e 36^o.

Recordando que os triângulos áureos têm ângulos internos de 36^o, 72^o e 72^o, vamos procurar os retângulos áureos existentes na Figura 14. Quais são? Procure os triângulos áureos antes de continuar a leitura. Observe que no interior da figura temos um outro Pentágono menor ($\beta = 108^o$), e portanto ele tem as mesmas propriedades.

Podemos agora resumir as relações áureas do Pentágono:

- O triângulo ACD e os outros congruentes a ele são áureos, logo L_5 é o segmento áureo da diagonal D.
- O triângulo CDI e os outros congruentes a ele são áureos, logo d é o segmento áureo do lado L_5.
- O triângulo AFH e os outros congruentes a ele, inclusive GHI, são áureos, logo l_5 é o segmento áureo da diagonal d.

7.3 Construção de um Pentágono conhecendo o valor do lado.

Na seção 7.1 estudamos um método de construção de um Pentágono inscrito numa circunferência de raio R.

Se quisermos usar este mesmo método para construir um Pentágono no qual é dado o valor do lado, e não o valor do raio R, precisamos de uma relação algébrica entre R e ℓ_5. Da seção 7.1 temos uma relação desse tipo, dada pelo triângulo ACD da Figura 12. Para facilitar a leitura repetiremos esse triângulo ao lado.

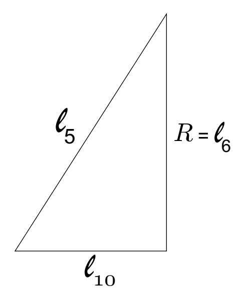


Figura 15: Relação entre R, ℓ_5 e ℓ_{10}

Essa relação dada pelo triângulo retângulo é geometricamente muito interessante, mas não é algebricamente amigável, pois exige um trabalho de manipulação algébrica razoável para determinar R a partir do valor de ℓ_5, precisamos inclusive recordar da seção 6 que ℓ_{10} é o segmento áureo de R, isto é, $\ell_{10} = (1/\phi).R$, e depois usar o teorema de Pitágoras.

Nessa seção vamos estudar um método geométrico direto de construção do Pentágono onde é dado o valor do lado. O Método utiliza o fato dado na seção anterior que diz que o lado de um Pentágono é o segmento áureo da sua diagonal.

Vamos construir um Pentágono onde o segmento $AB = \ell_5$ é um de seus lados. Veja a figura abaixo

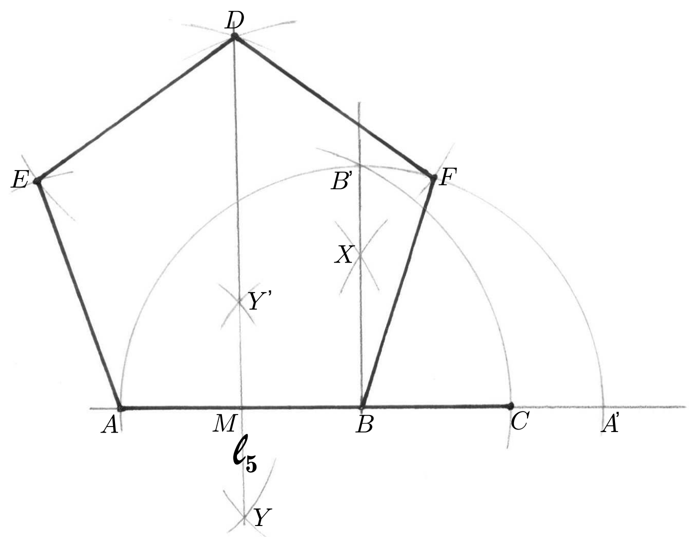


Figura 16: Pentágono - conhecendo o lado

Descrição do método de construção: vamos utilizar o método dado na Figura 4 para construir um segmento AC tal que AB seja seu segmento áureo. Este método desempenha papel central neste texto, portanto vamos repeti-lo aqui. Aqueles que já conhecem bem o método podem pular para o próximo parágrafo. Com a ponta seca do compasso em B e abertura igual a AB traçamos uma semicircunferência para determinar o ponto A'. Com a ponta seca em A e depois em A' traçamos pequenos arcos obtendo o ponto X. Temos que a reta BX é perpendicular a AB e intersecciona a semicircunferência em B'. Agora vamos determinar o ponto médio M do segmento AB. Com a ponta seca do compasso em A e depois em B e uma abertura um pouco maior que a metade de AB, traçamos pequenos arcos para marcar os pontos Y e Y', desse modo YY' corta AB em seu ponto médio M. Com a ponta seca em M e abertura igual a MB' traçamos um arco para encontrar o ponto C e temos que AC é o segmento procurado,

Temos que AB é o segmento áureo de AC, portanto AC é a diagonal do Pentágono de lado AB. Podemos construir o Pentágono. Com a ponto seca em A e depois em B, e abertura igual a AC traçamos pequenos arcos para encontrar o ponto D. Com abertura igual a AB, e com a ponta seca em D e depois em A marcamos o ponto E, e de modo análogo encontramos o último vértice F. O Pentágono está pronto.

7.4 O Pentagrama.

O Pentagrama é uma estrela de 5 pontas formada pelas diagonais do Pentágono, veja a Figura 17.

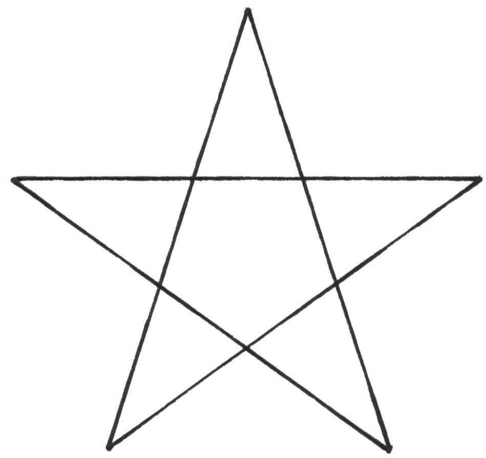


Figura 17: Pentagrama

As relações áureas que possui são tão grandes que muitas vezes é chamado de mágico ou divino. É utilizado como símbolo do infinito, pois contem em seu interior outro pentagrama, e assim sucessivamente. Pitágoras o considerava de tamanha importância que o utilizou como emblema da sua escola.

Essa estrela, usualmente desenhada sem tirar o lápis do papel, tem sido utilizada ao longo do tempo por várias civilizações com os mais variados significados: místicos, mágicos ou científicos. É usualmente utilizada como emblema, talismã, como símbolo de proteção contra energias negativas, e também:

- Na astronomia: na órbita do planeta Vênus. O planeta Vênus orbita 13 vezes para cada 8 órbitas da Terra. Assista o vídeo: https://www.facebook.com/watch/?v=238877927956329.
- No corpo humano: as 5 pontas representando a cabeça, 2 mãos e 2 pés (veja a pintura Homem Vitruano de Leonardo da Vinci, 1.452); nos 5 sentidos; e nos 5 dedos.
- Na numerologia: como soma do masculino 3 com o feminino 2.
- No esoterismo: 5 elementos da terra (espírito, terra, ar, fogo e água); 5 chagas de Cristo; no ciclo da vida (nascimento, infância, maturidade, velhice e morte).
- Outras associações: como o Pentagrama invertido, obtido pela rotação de 180^o da Figura 17, é associado ao satanismo e ao mal.

A mensagem de que para saber fazer é preciso antes saber a teoria, é o caminho para a motivação e o conhecimento.

Apêndice

Potência de Ponto: *Se uma reta passa por um ponto P e intersecciona uma circunferência nos pontos A e B, então o produto das distâncias $PA \, . \, PB$ é constante, não depende da reta.*

Prova: Considere uma circunferência e uma reta que passa por um ponto P, do lado de fora da circunferência, e que intersecciona a circunferência nos pontos A e B, veja a Figura 18.

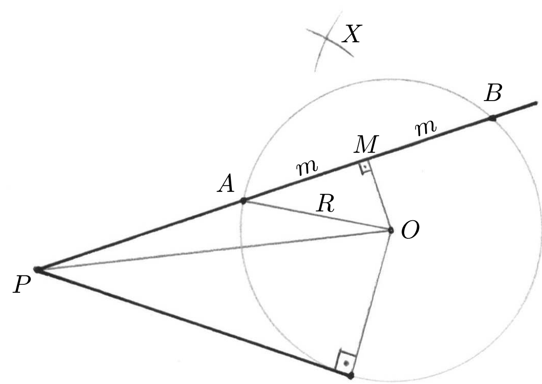


Figura 18: Potência de Ponto

Com a ponta seca do compasso em A e depois em B, e uma abertura apropriada, trace pequenos arcos para determinar o ponto X. Com a régua na direção OX trace o segmento OM, que é perpendicular a AB e divide AB em duas partes iguais, que chamamos de m. Temos então que

$$PA \, . \, PB = (PM - m) \, . \, (PM + m) = PM^2 - m^2. \tag{7.2}$$

Usando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos POM e AOM temos respectivamente que $PM^2 = PO^2 - OM^2$ e $m^2 = R^2 - OM^2$. Substituindo esses dois valores em (7.2), obtemos

$$PM^2 - m^2 = (PO^2 - OM^2) - (R^2 - OM^2) = PO^2 - R^2, \tag{7.3}$$

portanto de (7.2) e (7.3) segue que

$$PA \, . \, PB = PO^2 - R^2.$$

Essa ultima expressão $PO^2 - R^2$ justifica a afirmação da Potência de Ponto, pois depende da distância PO e do raio R, e não da reta.

Dedicatória.

Dedico este texto ao meu neto Ivan por sua aptidão e interesse pela Matemática.

Referência

[1] Marmo, Carlos e Marmo, Nicolau, Desenho Geométrico, volume 2, Editora Scipione, 1995.

Figura 10: Polígono