MA211 – Lista de Exercícios

Exercícios referentes ao livro "Um curso de Cálculo-vol.2- 5ª Edição

Pág. 118-119 - Desenhe a imagem:

(i) $F(t) = (1, t)$;

(ii) $F(t) = (2t - 1, t + 2)$;

(iii) $F(t) = (t, t^3)$;

(iv) $F(t) = (\sin t, \cos t)$;

(v) $F(t) = (\mathrm{e}^t \sin t, \mathrm{e}^t \cos t), \quad t \geq 0$.

Pág. 120-121 - Desenhe a imagem:

- $F(t) = (1, t, 1), \ t \in \mathbb{R}$;
- $F(t) = (1, 1, t), \ t \in \mathbb{R}$.

Pág. 126-127 - 1. Calcule:

$$\lim_{t \to 1} \overrightarrow{F}(t), \quad \text{onde} \quad \overrightarrow{F}(t) = \left(\frac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}, t^2, \frac{t - 1}{t} \right).$$

3. Determine o conjuntos dos pontos de continuidade. Justifique sua resposta.

a) $\overrightarrow{F}(t) = t\,\overrightarrow{i} + \sqrt{t}\,\overrightarrow{j} + 3\,\overrightarrow{k}$;

b) $\overrightarrow{F}(t) = \sqrt{t - 1}\,\overrightarrow{i} + \sqrt{t + 1}\,\overrightarrow{j} + \mathrm{e}^t\,\overrightarrow{k}$.

5. Sejam $\overrightarrow{F} : A \to \mathbb{R}^3$ e $G : A \to \mathbb{R}^3$. Suponha que $\lim_{t \to t_0} \overrightarrow{F}(t) = 0$ e que $\|\overrightarrow{G}(t)\| \leq M$ para todo $t \in A$, onde $M > 0$ é um real fixo. Prove que:

$$a)\ \lim_{t \to t_0} \overrightarrow{F}(t)\overrightarrow{G}(t) = 0 \qquad b)\ \lim_{t \to t_0} \overrightarrow{F}(t) \wedge \overrightarrow{G}(t) = 0$$

Pág. 133-135 - 1. Calcule $\frac{d\overrightarrow{F}}{dt}$ e $\frac{d^2\overrightarrow{F}}{dt^2}$ se $\overrightarrow{F}(t) = (3t^2, \mathrm{e}^{-t}, \ln(t^2 + 1))$.

3. Seja F definida no intervalo I com valores em $\mathbb{R}^n$. Suponha que $F'(t) = 0$ para todo $t \in I$. Prove que existe uma constante $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(t) = k$ para todo $t \in I$.

4. Seja $\overrightarrow{F} : I \to \mathbb{R}^3$, derivável até ordem 2. Suponha que exista um real $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que para todo $t \in I$ vale que $\frac{d^2\overrightarrow{F}}{dt^2}(t) = \lambda \overrightarrow{F}(t)$. Prove que $\overrightarrow{F}(t) \wedge \frac{d\overrightarrow{F}}{dt}(t)$ é constante em I.

6. Seja $\overrightarrow{r}$ definida em $\mathbb{R}$ com valores em $\mathbb{R}^3$ e derivável até ordem 2. Prove que se $\overrightarrow{r}(t) \wedge \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}(t)$ for constante em $\mathbb{R}$, então $\overrightarrow{r}(t) \wedge \frac{d^2\overrightarrow{F}}{dt^2}(t) = 0$.

9. Suponha que $\|\overrightarrow{v}(t)\| \neq 0$ para todo t. Defina $\overrightarrow{T}(t) = \frac{\overrightarrow{v}(t)}{v(t)}$ onde $v(t) = \|\overrightarrow{v}(t)\|$. Prove que:

a) $\overrightarrow{T}$ e $\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}$ são ortogonais;

b) $\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = v\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} + \frac{dv}{dt}\overrightarrow{T}$.

Pág. 151 - 1. Seja $f(x,y) = 3x + 2y$. Calcule:

$$a) f(1,-1) \qquad d) \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}$$

2. Seja $f(x,y) = \frac{x-y}{x+2y}$.

$$a)\text{Ache o domínio de } f \qquad b)\text{Calcule} f(2u+v, v-u)$$

3. Represente graficamente o domínio da função $z = f(x,y)$ dada por:

$$c) z = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{2x - y}, \qquad f) z = \sqrt{|x| - |y|}, \qquad g) 4x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \leq 0.$$

8. Seja $g : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ uma função dada. Prove que existe uma única função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, homogênea de grau $\lambda \neq 0$, tal que para todo $\alpha \in [0, 2\pi)$ tem-se que $f(\cos\alpha, \sin\alpha) = g(\alpha)$.

Pág. 159-161 - 1. Desenhe as curvas de níveis e esboce o gráfico das seguintes funções:

a) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$;

c) $z = 4x^2 + y^2$;

e) $z = x + y + 1$;

g) $f(x,y) = x^2$, para $-1 \leq x \leq 0$ e $y \geq 0$;

j) $z = (x-y)^2$, $\quad x \geq 0$ e $y \geq 0$;

m) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $\quad x^2 + y^2 < 1$;

q) $f(x,y) = \sin x$, $\quad x \in [0, \pi]$ e $y \geq 0$.

2. Desenhe as curvas de nível e determine a imagem das seguintes funções:

a) $f(x,y) = x - 2y$;

c) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$;

e) $z = xy$;

g) $z = 4x^2 + y^2$;

i) $z = \frac{x^2}{x^2+y^2}$.

7. Um ponto P descreve uma curva sobre o gráfico da função $f(x,y) = x^2 + y^2$ de modo que sua projeção Q sobre o plano xy descreve a reta $x + y = 1$. Determine o ponto da curva que se encontra mais próximo do plano xy. (Desenhe a trajetória descrita por P).

10. Sejam $f(x,y) = xy$ e $\gamma(t) = (at, bt, f(at, bt))$. Desenhe a imagem de γ sendo:

$$a) a = 0, b = 1, \quad b) a = 1, b = 1, \quad c) a = 1, b = 0, \quad d) a = -1, b = 1.$$

14. Duas curvas de níveis de uma mesma função podem se interceptar? Justifique.