MA502 – Lista V

Exercício 1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e suponha que

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que f é constante.

Exercício 2. Suponha que $f'(x) > 0$ em (a, b). Prove que f é estritamente crescente em (a, b) e considere $g := f^{-1}$. Prove que g é diferenciável em $f((a, b))$ e que

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}, \ x \in (a, b).$$

Exercício 3. 3. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e assuma que a derivada de g é limitada, isto é $|g'(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$ defina $f_\varepsilon(x) = x + \varepsilon g(x)$. Prove que f_ε é injetora se ε é suficientemente pequeno.

Exercício 4. 4. Sejam $C_0, C_1, \ldots, C_n$ constantes reais tais que

$$C_0 + \frac{C_1}{2} + \cdots + \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{C_n}{n+1} = 0$$

Mostre que o polinômio

$$p(x) = C_0 + C_1 x + \cdots + C_{n-1} x^{n-1} + C_n x^n$$

tem pelo menos uma raíz real entre 0 e 1.

Exercício 5. Suponha que f é definida e diferenciável para todo $x > 0$, e que $f'(x) \to +\infty$ quando $x \to +\infty$. Defina g por $g(x) = f(x + 1) - f(x)$. Prove que $g(x) \to 0$ quando $x \to +\infty$.

Exercício 6. . Suponhamos que $f'(x_0)$ e $g'(x_0)$ existam, $g'(x_0) \neq 0$ e $g(x_0) - f(x_0) = 0$. Prove que

$$\lim_{t \to x_0} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Exercício 7. . Suponha que f' é contínua em $[a, b]$. Prove que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f'(x) \right| < \varepsilon$$

para todo $x, t \in [a, b]$ tal que $0 < |t - x| < \delta$.

Exercício 8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e tal que $f'(x)$ existe para todo $x \neq 0$ e $lim_{x \to 0} f'(x) = 3$. É verdade que $f'(0)$ necessariamente existe?

Exercício 9. Seja $f(x) = |x|^3$. Calcule $f'(x)$ e $f''(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e mostre que $f^{(3)}(0)$ não existe.

Exercício 10. Suponha que f é diferenciável em $[a, b]$, $f(a) = 0$, e existe um número real $A > 0$ tal que $|f'(x)| \leq A|f(x)|$ para todo $[a, b]$. Prove que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Exercício 11. Assumindo as definições e propriedades das funções seno, cosseno, logaritmo, exponencial etc., calcule:

(a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1+x^k}{e^x}$, $k \in \mathbb{N}$; (b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x}$;

(c) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x}$; (d) $\lim_{x \to p^+} \frac{\mathrm{e}^{cos(x-p)-1}-1}{(x-p)^3}$.

Exercício 12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Um ponto $x \in \mathbb{R}$ é dito ser um *ponto fixo* de f se $f(x) = x$.

a) Prove que se f é diferenciável e $f'(t) \neq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$ então f admite no máximo um ponto fixo.

b) Mostre que a função $f(t) = t + (1 + \mathrm{e}^t)^{-1}$ é tal que $f'(t) \in (0, 1)$, no entanto f não tem ponto fixo.

Exercício 13. Seja $f \in C^3$ uma função real tal que $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$. Prove que para todo $\delta > 0$ existem $x_1, x_2 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tais que $f(x_0) > f_(x_1)$ e $f(x_0) < f(x_1)$, isto é, x_0 é um *ponto de sela.*