MA502 – Lista IV

Exercício 0. Seja $f : X \to Y$ uma função. Dado $A \subset Y$ defina a *imagem inversa* de A como sendo o conjunto

$$f^{-1}(A) := \{x \in X; f(x) \in A\}.$$

Prove que

a) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ e $f^{-1}(Y) = X$;

b) $f^{-1}(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha f^{-1}(A_\alpha)$ e $f^{-1}(\bigcap_\alpha A_\alpha) = \bigcap_\alpha f^{-1}(A_\alpha)$;

c) $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$ e $A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$;

d) $B \subset f^{-1}(f(B))$ e se f é injetiva $B = f^{-1}(f(B))$

e) $f(f^{-1}(A)) \subset A$ e se f é sobrejetiva $f(f^{-1}(A)) = A$

No que segue, os espaços X e Y são espaços métricos.

Exercício 1. Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaça

$$\lim_{h\to 0}[f(x+h) - f(x-h)] = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Posso afirmar que f é contínua?

Exercício 2. Seja $f : X \to Y$ uma função contínua. Mostre que $f(\bar{E}) \subset f(\bar{E})$ para todo conjunto $E \subset X$ Dê um exemplo onde a inclusão é própria.

Exercício 3. Seja f uma função real contínua em X e considere o conjunto

$$Z(f) := \{p \in X : f(p) = 0\}.$$

Mostre que $Z(f)$ é fechado.

Exercício 4. 4. Seja $f : X \to Y$ uma função contínua e $E \subset X$ um subconjunto denso. Mostre que $f(E)$ é denso em $'Y$.

Exercício 5. Sejam $f, g : X \to Y$ funções contínuas e assuma que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in E \subset X$. Mostre que se E é denso, então $f = g$.

Exercício 6. . Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto fechado e $f : E \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que existe uma função contínua $g : \mathbb{R} \to R$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in E$.

Exercício 7. Dada uma função $f : X \to Y$ definimos o *gráfico* de f como sendo o conjunto

$$G(f) := \{(x, f(x)), x \in X\}.$$

Mostre que, se X é compacto, então f é contínua se e só se $G(f)$ é um subconjunto fechado de $X \times Y$.

Exercício 8. Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto não compacto. Mostre que[1]

1. existe uma função contínua em E que não é limitada;
2. existe uma função contínua e limitada em E que não tem máximo;
3. se E for limitado então, existe uma função contínua em E que não é uniformemente contínua.

Exercício 9. Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado e $f : E \to \mathbb{R}$uma função uniformemente contínua. Prove que f é limitada em E. Dê um exemplo para mostrar que a hipótese de E ser limitado não pode ser excluída.

Exercício 10. Seja $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Suponha que $f : I \to I$ é uma função contínua. Prove que existe $x \in I$ tal que $f(x) = x$. Prove também que todo polinômio de grau ímpar $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2n+1}x^{2n+1}$ admite uma raíz real.

Exercício 11. Uma função $f : X \to Y$ é dita ser *aberta* se $f(V)$ é aberto em Y para todo V aberto em X. Prove que toda função aberta e contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é monótona.

Exercício 12. Se $E \subset X$ é um subconjunto não vazio de um espaço métrico, definimos a distância de x a E por

$$\rho_E(x) := \inf_{z \in E} d(x, z).$$

a) Prove que$\rho_E(x) = 0$ se, e somente se, $x \in E$.
b) Prove que ρ_E é uniformemente contínua em X mostrando que

$$|\rho_E(x) - \rho_E(y)| \leq d(x, y).$$

Exercício 13. Sejam K e F dois conjuntos disjuntos de X e assuma que F seja fechado e K compacto. Prove que existe $\delta > 0$ tal que $d(p, q) > \delta$ para todo $p \in K$ e $q \in F$. Mostre que a conclusão pode falhar se nenhum deles for compacto.

Exercício 14. 4. Uma função real f definida em (a, b) é dita ser convexa em (a, b) se dados quaisquer $a < x < b$, $a < y < b$ e $0 < \lambda < 1$ temos

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Prove que toda função convexa em (a, b) é contínua em (a, b). Assuma que g é uma função real contínua definida em (a, b) satisfazendo

$$g\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{g(x) + g(y)}{2}$$

para todos $x, y \in (a, b)$. Prove que g é convexa.

[1] ver Teorema 4.20 do Rudin