MA502 – Lista III

Exercício 1. Calcule o limite $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+n}-n$

Exercício 2. Se $s_1=\sqrt{2}$ e $s_{n+1}:=\sqrt{2+s_n}$ para $n\geq 1$, prove que $s_n<2$ para todo $n\geq 1$ e que (s_n) converge.

Exercício 3. Determine se a serie $\sum a_n$ é convergente ou divergente se:

1. $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;

2. $a_n=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$;

3. $a_n=(\sqrt[n]{n}-1)^n$;

4. $a_n=\frac{1}{1+x^n}$

Exercício 4. Mostre que se $\sum a_n$ converge, então $\sum\frac{a_n}{n}$ converge, onde $a_n\geq 0$ para $n\geq 1$.

Exercício 5. Mostre que se $\sum a_n$ converge e (b_n) é uma sequência monótona limitada então $\sum a_nb_n$ converge.

Exercício 6. Seja $\{E_n\}$ uma família de subconjuntos fechados, não vazios e limitados de um espaço métrico completo X. Se $E_n\supset E_{n+1}$ e $\mathrm{diam}(E_n)\to 0$ prove que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}E_n \quad \text{consiste de um único ponto.}$$

Exercício 7. Sejam (x_n) e (y_n) sequências de Cauchy em um espaço métrico (X,d). Mostre que a sequência $(d(x_n,y_n))_n$ converge.

Exercício 8. Prove que a série

$$\sum_{p \ \text{primo}}\frac{1}{p}, \qquad \text{é divergente.}$$

Exercício 9. Fixe um número positivo α. Considere $x_1>\alpha$ e defina a sequência (x_n) recursivamente por

$$x_{n+1}:=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{\alpha}{x_n}\right),\quad n\geq 1.$$

Prove que (x_n) é decrescente e que $x_n\to\sqrt{\alpha}$.

Exercício 10. Seja $\sum a_n$ uma série divergente com $a_n>0$. Prove que:

1. $$\sum\frac{a_n}{1+a_n}\quad \text{é divergente.}$$

2.
$$\frac{a_{n+1}}{s_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{s_{n+2}} + \cdots + \frac{a_{n+k}}{s_{n+k}} \geq 1 + \frac{s_n}{s_{n+k}}, \ n, k \in \mathbb{N}$$
e portanto $\sum \frac{a_n}{s_n}$ diverge.

3.
$$\frac{a_{n+1}}{s_{n+1}^2} \leq \frac{1}{s_n} - \frac{1}{s_{n+1}}$$
e portanto $\sum \frac{a_n}{s_n}$ converge.

Exercício 11. Calcule o raio de convergência das seguintes séries:

$$(a) \sum n^3 z^n, \qquad (b) \sum \frac{2^n}{n!} z^n \qquad (c) \sum \frac{2^n}{n^2} z^n$$

Exercício 12. Suponha que os coeficientes de uma série de potências $\sum a_n z^n$ são inteiros, sendo infinitos deles não nulos. Prove que o raio de convergência da série é no máximo 1.

Exercício 13. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em um espaço métrico X. Prove que se alguma subsequência de (x_n) converge, então a (x_n) também converge.

Exercício 14. Dada uma sequência de números positivos x_n com $\lim x_n = a$ prove que $\lim \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = a$.

Exercício 15. Sejam (x_n) e (y_n) sequência reais limitadas. Mostre que

$$(a) \limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty}(a_n);$$

$$(b) \limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n) \limsup_{n\to\infty}(b_n);$$

$$(c) \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n) + \limsup_{n\to\infty}(b_n).$$

Exercício 16. Calcule os limites superior e inferior da sequência (s_n) definida por:

$$s_1 = 0, \quad s_{2n} = \frac{s_{2n-1}}{2}, \quad s_{2n+1} = \frac{1}{2} + s_{2n}$$