MA502 – Lista II

Nos exercícios a seguir, (X, d) será sempre um espaço métrico e $E \subset X$ um subconjunto próprio não vazio.

Exercício 1. Defina:

1. Ponto interior e conjuntos abertos;
2. Ponto de acumulação e conjuntos fechados;
3. Conjuntos perfeitos, densos e fecho de um conjunto;
4. Conjuntos compactos e conexos.

Exercício 2. Mostre que:

1. $\text{int}E$ é aberto;
2. E é aberto, se e somente se, $E = \text{int}E$;
3. Se $U \subset E$ é um aberto, então $U \subset \text{int}E$;
4. $(\text{int}E)^c = \overline{E^c}$ e $\text{int}E^c = \overline{E}^c$;
5. Dê exemplo de um conjunto E tal que $\text{int}E \neq \text{int}\overline{E}$ e $\overline{\text{int}E} \neq \overline{E}$.

Exercício 3. Seja $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de subconjuntos de X. Prove que:

1. Para todo $m \in \mathbb{N}$ vale que
$$\overline{\bigcup_{i=1}^{m} A_i} = \bigcup_{i=1}^{m} \overline{A_i} \quad \text{e} \quad \text{int}\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{m} \text{int}\,(A_i)$$
2. $$\overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i} \supset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \overline{A_i} \quad \text{e} \quad \text{int}\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \text{int}\,(A_i)\,.$$
De um exemplo onde as inclusões contrárias não valem.
3. Se $A, B \subset X$, mostre que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ e $\text{int}(A \cup B) \supset \text{int}A \cup \text{int}B$. Dê exemplos onde a inclusão contrária não vale.

Exercício 4. Dê um exemplo de uma cobertura aberta de $(0, 1)$ que não possua subcobertura finita.

Exercício 5. Seja $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma família de subconjuntos de X. Defina

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right)$$

e

$$\liminf_n A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right).$$

Prove que:

1. $\liminf_n A_n \subset \limsup_n A_n$;

2. Se $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então

$$\liminf_n A_n = \limsup_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n;$$

3. Se $A_n \supset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então

$$\liminf_n A_n = \limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Exercício 6. Um espaço métrico é dito *separável* se ele contem um subconjunto enumerável e denso. Mostre que $\mathbb{R}^n$ é separável.

Exercício 7. Seja $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ uma família de subconjuntos fechados de X. Dizemos que $\mathcal{F}$ tem a *propriedade de interseção finita* (PIF) se toda interseção finita de subconjuntos de $\mathcal{F}$ é não vazia.

Prove que X é compacto se, e somente se, toda família de fechados $\mathcal{F}$ com a PIF é tal que

$$\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha \neq \emptyset.$$

Exercício 8. Seja $K \subset X$ um compacto. Dado $x \in K^c$, mostre que existem abertos U, V tais que $x \in V$, $K \subset U$ e $U \cap V = \emptyset$. Conclua que todo compacto $K \subset X$ é fechado. Além disso, mostre que se $F \subset X$ é fechado, então $F \cap K$ é compacto.

Exercício 9. Se $C \subset X$ é conexo, mostre que $\overline{C}$ é também conexo. De um exemplo de um conexo C tal que $\text{int}C$ não é conexo.

Exercício 10. Prove que todo conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ é conexo. Conclua que as bolas abertas e fechadas de $\mathbb{R}^n$ são conexas.