MA211 – Limites e Continuidade

(i) Calcule caso exista:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \sin \frac{1}{x^2+y^2}$ b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x-y)}{x^4+y^4}$ d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$.

(ii) Seja $f(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^4}$.

a) Considere a reta $\gamma(t) = (at, bt)$ com $a^2 + b^2 > 0$. Mostre que quaisquer que sejam a, b tem-se que

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = 0.$$

b) Calcule $\lim_{t\to 0} f(\delta(t))$, onde $\delta(t) = (t^2, t)$;

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^4}$ existe? Por quê?

(iii) Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right)} & \text{se } x^2+y^2<1 \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 \geq 1. \end{cases}.$$

Calcule

$$\lim_{(x,y)\to\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2-1}.$$

(iv) Prove que se f for contínua em $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e se $f(x_0, y_0) > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que

$$\|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \implies f(x,y) > 0.$$