Q1. (2.0) Considere a curva definida pela equação $xy^3 - x^5y^2 = 4$. Calcule y' e encontre a aproximação linear à curva no ponto $(1, 2)$.

Resolução: Derivamos implicitamente a equação:

$$y^3 + x3y^2y' - 5x^4y^2 - x^5 2yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{5x^4y^2 - y^3}{3xy^2 - 2yx^5}. \text{ (1.0)}$$

A aproximação linear à curva no ponto $(1, 2)$ é dada por

$$L(x) = y'(1)(x - 1) + y(1).$$

Como o ponto $(1, 2)$ pertence à curva, para $x = 1$ temos que $y = 2$ e portanto

$$y'(1) = \frac{3}{2}.$$

Logo,

$$L(x) = \frac{3}{2}(x - 1) + 2. \text{ (1.0)}$$

Q2. (2.5) Calcule

(a) (0.5) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

(b) (1.0) $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)}$

(c) (1.0) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

Resolução:

(a) Como

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

então temos uma indeterminação do tipo "$\frac{\infty}{\infty}$". Usando a regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0. \text{ (0.5)}$$

(b) Observe que

$$x^{\operatorname{sen}(x)} = e^{\operatorname{sen}(x)\ln(x)} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}}\right). \text{ (0.2)}$$

Como

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = +\infty \text{ e } \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

temos uma indeterminação do tipo "$\frac{\infty}{\infty}$". Usando a Regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2(x)}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x}. \text{ (0.3)}$$

Observe que o limite da direita é uma indeterminação do tipo "$\frac{0}{0}$". Aplicando L'Hôpital novamente obtemos que

$$\lim_{x\to 0^+} -\frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{\cos x - x\operatorname{sen} x} = \frac{0}{1} = 0. \text{ (0.3)}$$

Como a exponencial é contínua,

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{\ln(x)}{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}}\right) = e^0 = 1. \text{ (0.2)}$$

(c) Observe que

$$\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^{x\ln(1+\frac{2}{x})} = \exp\left(\frac{\ln(1+\frac{2}{x})}{\frac{1}{x}}\right). \text{ (0.2)}$$

Como

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(1+\frac{2}{x}) = 0 \text{ e } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

temos uma indeterminação da forma "$\frac{0}{0}$". Aplicando L'Hôpital obtemos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{2}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1+\frac{2}{x}} = 2. \text{ (0.5)}$$

Portanto, como a exponencial é contínua

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{\ln(1+\frac{2}{x})}{\frac{1}{x}}\right) = \exp\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{2}{x})}{\frac{1}{x}}\right) = e^2. \text{ (0.3)}$$

Q3.(3.5) Considere a seguinte função

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}.$$

(a) (0.5) Encontre o domínio de f, os pontos de intersecção do gráfico de f com os eixos e analise a simetria de f.

(b) (0.7) Caso existam, determine as assíntotas horizontais e verticais de f.

(c) (0.8) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f, seus pontos de máximo e mínimo e os seus valores.

(d) (0.8) Determine os intervalos onde f tem concavidade para cima e para baixo e os pontos de inflexão.

(e) (0.7) Esboce o gráfico de f usando as informações obtidas nos itens anteriores.

Resolução:

(a) O domínio de f é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 2\}$. (0.1)

Temos que $f(0) = -\frac{1}{4}$ e portanto o gráfico de f intercepta o eixo y em $y = -\frac{1}{4}$. (0.1)

Além disso, temos que $f(x) \neq 0$ portanto o gráfico de f não intercepta o eixo x. (0.1)

Como $f(-x) = f(x)$ então f é par. (0.2)

(b) *Assíntotas horizontais:* Usando a Regra de L'Hôpital obtemos que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{2x} = 1.$$

Portanto, $y = 1$ é assíntota horizontal. (0.3)

Assíntotas verticais: Como o denominador da função se anula em $x = \pm 2$ temos que as retas $x = \pm 2$ são candidatas a ser assíntotas verticais. Vamos analisar os limites laterais de f quando x se aproxima de ± 2. Temos que $\lim_{x\to\pm 2} x^2 + 1 = 5 > 0$. Por outro lado, $x^2 - 4$ é muito pequeno para x próximo de ± 2, mas analisando o sinal, $x^2 - 4 > 0$ para $x > 2$ e $x < -2$ e $x^2 - 4 < 0$ para $x < 2$ e $x > -2$. Assim,

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+1}{x^2-4} = +\infty, \quad \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+1}{x^2-4} = -\infty, \quad \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2+1}{x^2-4} = -\infty, \quad \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2+1}{x^2-4} = +\infty.$$

Logo, as retas $x = \pm 2$ são assíntotas verticais. (0.4)

(c) Para encontrar os intervalos de crescimento e decrescimento de f temos que calcular sua derivada. Pela regra do quociente temos que

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - (x^2+1)2x}{(x^2-4)^2} = -\frac{10x}{(x^2-4)^2}. \text{ (0.2)}$$

Logo, f é decrescente em $(2, \infty)$ e $(0, 2)$ e crescente em $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$. (0.4)

Observe que $f'(x) = 0$ em $x = 0$ e pelo teste da primeira derivada temos que $x = 0$ é um ponto de máximo local. Logo, $f(0) = -\frac{1}{4}$ é valor de máximo local. (0.2)

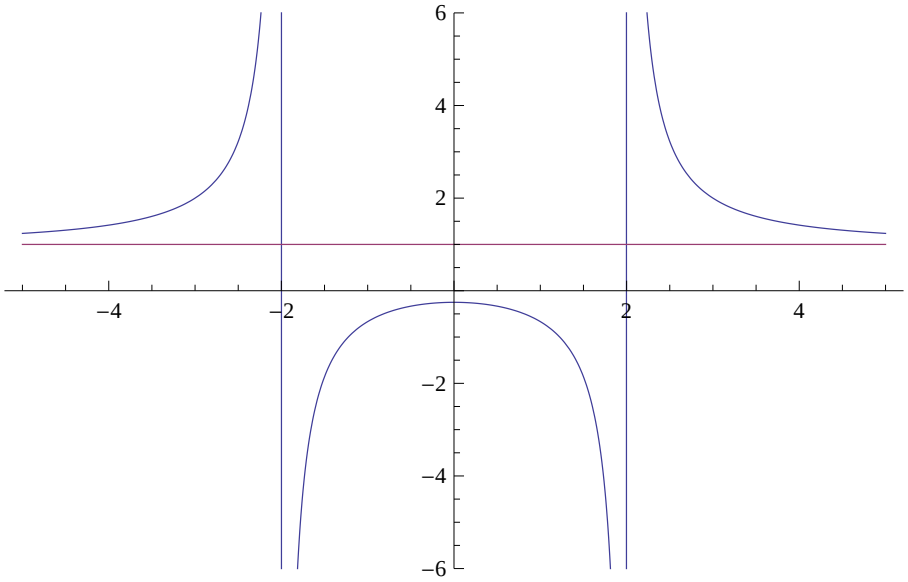
(d) Para determinar a concavidade do gráfico vamos calcular f''. Pela regra do quociente temos que

$$f''(x) = -\frac{10(x^2-4)^2 - 10x2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4} = \frac{10(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}. \text{ (0.2)}$$

Como $f''(x) > 0$ em $(-\infty, -2)$ e $(2, \infty)$, temos que f é côncava para cima em $(-\infty, -2)$ e $(2, \infty)$. Como $f''(x) < 0$ em $(-2, 2)$, temos que f é côncava para baixo em $(-2, 2)$. (0.4)

Não há pontos de inflexão porque os pontos onde muda a concavidade não pertencem ao domínio. (0.2)

(e) Esboço do gráfico de f: (0.7)

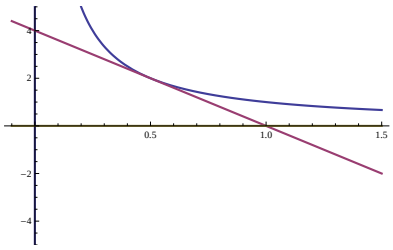


Q4. (2.0) Forma-se um triângulo retângulo no primeiro quadrante com vértice na origem e no qual a hipotenusa é um segmento de reta tangente ao gráfico de $y = \dfrac{1}{x}$, cujas extremidades estão sobre os eixos coordenados.

(a) Existe uma área máxima para tal triângulo? Existe uma área mínima? Justifique.

(b) Qual o comprimento da menor hipotenusa desta familia de triângulos? Certifique-se de que sua resposta dê o mínimo global.

Resolução:



(a) A reta tangente a gráfico de $y = \dfrac{1}{x}$ num ponto $(a, \frac{1}{a})$ é dada por

$$L(x) = y'(a)(x-p) + y(a) = -\frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a}. \quad (0.5)$$

A altura do triângulo é dada por $L(0) = \frac{2}{a}$ e a base do triângulo tem comprimento x onde x é tal que $L(x) = 0$, ou seja, $x = 2a$. Desta forma, á area do triângulo é:

$$A(a) = \frac{1}{2}(2a)\frac{2}{a} = 2.$$

Logo a área desses triângulos é constante e portanto não existe área máxima nem mínima. (0.5)

(b) O comprimento da hipotenusa é

$$H(a) = \sqrt{\frac{4}{a^2} + 4a^2} = 2\sqrt{\frac{1}{a^2} + a^2}, \quad a > 0. \quad (0.3)$$

Para encontrar o mínimo, derivamos

$$H'(a) = \frac{\frac{-2}{a^3} + 2a}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + a^2}}.$$

Logo, $H'(a) = 0$ quando

$$a = \frac{1}{a^3} \Rightarrow a^4 = 1 \Rightarrow a = \pm 1.$$

Como $a > 0$ só tem um ponto crítico $a = 1$.

Como $H'(a) < 0$ em $(0,1)$ então H é decrescente em $(0,1)$ e como $H'(a) > 0$ em $(1, +\infty)$ então H é crescente em $(1, \infty)$. Pelo teste da derivada primeira, $a = 1$ é um ponto de mínimo local e absoluto. (0.6)

O comprimento mínimo é $H(1) = \sqrt{4^2 + 4^2} = 2\sqrt{2}$. (0.1)