Métricas ad-invariantes em Álgebras de Lie

Marcos Ricardo Cavicchioli de Almeida - IMECC - UNICAMP
m183774@dac.unicamp.br
Profª Dra. Viviana del Barco (Orientadora) - IMECC - UNICAMP
delbarc@unicamp.br

Projeto de iniciação científica fomentado pela FAPESP, número 2022/07595-9.

Setembro de 2023

Sumário

1 Prefácio

Este material é resultado de um trabalho de iniciação científica, projeto de número 2022/07595-9 fomentado pela FAPESP. Para seu uso, é esperado que o estudante já tenha feito um curso básico de álgebra linear e esteja familiarizado com espaços vetoriais, transformações lineares, produto interno, etc. Para uma revisão desses assuntos, as referências [3] e [6] são boas opções.

Neste projeto, o objetivo principal foi o estudo de álgebras de Lie munidas de métricas ad-invariantes. Numa primeira instância, se estudou a estrutura de uma álgebra de Lie, que não é nada mais do que um espaço vetorial dotado de uma transformação bilinear que satisfaz certas propriedades (chamada comumente de colchete de Lie), [5]. Como primeiros exemplos foram trabalhados espaços vetoriais notáveis de matrizes, como $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$, que são álgebras de Lie clássicas com métricas ad-invariantes [5], [7], [3].

Com o estudo de formas bilineares, a ideia de métrica pode ser apresentada, bem como o estudo de álgebras de Lie com uma abordagem mais abstrata, [3], [5], [4], [8]. Através do cálculo da forma de Cartan-Killing nos espaços clássicos de matrizes, foi possível verificar que o colchete de Lie é antissimétrico. Uma métrica é uma forma bilinear não-degenerada que busca expandir a noção de produto interno em espaços vetoriais, e o fato de uma métrica ser ad-invariante significa que o colchete de Lie define transformações antissimétricas com respeito à métrica.

Finalmente, se estudou no fim do projeto o processo de extensão dupla introduzido por Favre e Santharoubane ([1]), ainda que em alguns exemplos pontuais. Este processo permite construir álgebras de Lie com métricas ad-invariantes a partir de álgebras com a mesma estrutura, mas com dimensões menores. Assim, foi possível construir álgebras de Lie de dimensões baixas partindo de álgebras abelianas de dimensão 1 ou 2.

Agradeço à FAPESP por todo o apoio ao projeto, bem como à minha orientadora, Profa. Viviana del Barco, por todos os ensinamentos.

2 Introdução

2.1 Álgebras de Lie

Definição 1. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$. Uma álgebra de Lie consiste no par $(V, [\ ,\ ])$ onde*

$$[\ ,\ ] : V \times V \longrightarrow V$$

é um produto de vetores, chamado colchete (ou comutador) com as seguintes propriedades:

1. *é **bilinear**, isto é, dados α e β em $\mathbb{F}$ e $u, v, w, r \in V$:*

$$[\alpha u + v, w] = \alpha[u, w] + [v, w]$$

$$[u, \beta w + r] = \beta[u, w] + [u, r].$$

2. ***antissimetria**, $\forall\ u \in V$ temos*

$$[u, u] = 0.$$

3. *satisfaz a **identidade de Jacobi**, $\forall\ u$, v e $w \in V$ temos:*

$$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0.$$

É interessante observar que decorre da propriedade antissimétrica que:

$$0 = [u + v, u + v] = [u, u] + [u, v] + [v, u] + [v, v] = [u, v] + [v, u]$$

e então

$$[u, v] = -[v, u] \quad \forall\ u\,,\ v \in V.$$

Se $\mathbb{F}$ não for um corpo de característica 2, então esta propriedade implica também a antissimetria, e portanto são equivalentes. Esta propriedade e a identidade de Jacobi diferenciam a Álgebra de Lie de outras álgebras.

2.1.1 Exemplos

1. O espaço vetorial das matrizes $n \times n$ sobre o corpo $\mathbb{F}$, $M_n(\mathbb{F})$, munido do colchete

$$[A, B] = AB - BA \quad \forall\, A\,, B \in M_n(\mathbb{F})$$

é uma álgebra de Lie.

De fato:

- **bilinearidade:** Vamos considerar aqui as propriedades básicas da soma e da multiplicação de matrizes. Sejam A, B, C e D $\in M_n(\mathbb{F})$ e α, $\beta \in \mathbb{F}$.

$$\begin{aligned}[\alpha A + B, C] &= (\alpha A + B)C - C(\alpha A + B) \\ &= \alpha AC + BC - \alpha CA - CB \\ &= \alpha(AC - CA) + (BC - CB)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[A, \beta C + D] &= A(\beta C + D) - (\beta C + D)A \\ &= \beta AC + AD - \beta CA - DA \\ &= \beta(AC - CA) + (AD - DA)\end{aligned}$$

e então

$$[\alpha A + B, C] = \alpha[A, C] + [B, C]$$

$$[A, \beta C + D] = \beta[A, C] + [A, D].$$

- **antissimetria:** Dado A $\in M_n(\mathbb{F})$:

$$[A, A] = AA - AA = A^2 - A^2 = 0.$$

- **identidade de Jacobi:** Considere A, B e C $\in M_n(\mathbb{F})$:

$$\begin{aligned}[A, [B, C]] &= A(BC - CB) - (BC - CB)A \\ &= ABC - ACB - BCA + CBA\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[B, [C, A]] &= B(CA - AC) - (CA - AC)B \\ &= BCA - BAC - CAB + ACB\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[C, [A, B]] &= C(AB - BA) - (AB - BA)C \\ &= CAB - CBA - ABC + BAC.\end{aligned}$$

Somando as três expressões e reordenando os termos, obtemos $[A, [B, C]] + [B, [C, A] + [C, [A, B]] = 0$.

2. Dado um espaço vetorial $V(\mathbb{F})$ qualquer, se considerarmos o colchete

$$[u, v] = 0 \quad \forall\, u,\, v \in V$$

teremos que $(V, [\ ,\ ])$ é uma álgebra de Lie, que recebe o nome especial de **álgebra de Lie abeliana**. As propriedades se verificam facilmente.

3. Um *isomorfismo* entre dois espaços vetoriais V e W sobre um corpo $\mathbb{F}$ é uma transformação linear $T : V \to W$ bijetora. Se V possui uma estrutura de álgebra de Lie $(V, [\ ,\ ])$, podemos definir em W uma álgebra de Lie através do isomorfismo. Dados w_1 e $w_2 \in W$ definimos

$$[w_1, w_2]' = T([T^{-1}(w_1), T^{-1}(w_2)])$$

e obtemos (W, [,]'). De fato, sejam w_1, w_2 e $w_3 \in W$ e $\alpha \in \mathbb{F}$:

- **bilinearidade:** Utilizaremos do fato que T^{-1} também é uma transformação linear e as propriedades do colchete em V:

$$\begin{aligned}
[\alpha w_1 + w_2, w_3]' &= T([T^{-1}(\alpha w_1 + w_2), T^{-1}(w_3)]) \\
&= T([T^{-1}(\alpha w_1) + T^{-1}(w_2), T^{-1}(w_3)]) \\
&= \alpha T([T^{-1}(w_1), T^{-1}(w_3)]) + T([T^{-1}(w_2), T^{-1}(w_3)]) \\
&= \alpha [w_1, w_3]' + [w_2, w_3]'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[w_1, \alpha w_2 + w_3]' &= T([T^{-1}(w_1), T^{-1}(\alpha w_2 + w_3)]) \\
&= T([T^{-1}(w_1), T^{-1}(\alpha w_2) + T^{-1}(w_3)]) \\
&= \alpha T([T^{-1}(w_1), T^{-1}(w_2)]) + T([T^{-1}(w_1), T^{-1}(w_3)]) \\
&= \alpha [w_1, w_2]' + [w_1, w_3]'.
\end{aligned}$$

- **antissimetria**:

$$\begin{aligned}
[w_1, w_1]' &= T([T^{-1}(w_1), T^{-1}(w_1)]) \\
&= T(0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

- **identidade de Jacobi:** Como temos:

$$[w_1, [w_2, w_3]']' = T([T^{-1}(w_1), [T^{-1}(w_2), T^{-1}(w_3)]])$$

e o colchete em V satisfaz a identidade de Jacobi, considerando v_i=$T^{-1}(w_i)$ para i=1,2,3:

$$[v_1, [v_2, v_3]] + [v_2, [v_3, v_1]] + [v_3, [v_1, v_2]] = 0$$

e então

$$[w_1, [w_2, w_3]']' + [w_2, [w_3, w_1]']' + [w_3, [w_1, w_2]']' = 0.$$

2.2 Subálgebras de Lie

Definição 2. *Dada uma álgebra de Lie (V, [,]), uma subálgebra é um subespaço vetorial W $\subseteq$ V tal que (W, [,]) é álgebra de Lie.*

Em geral, para um subespaço ser uma subálgebra de Lie é preciso que a imagem do colchete pertença ao subespaço.

1. Se considerarmos o espaço das matrizes reais antissimétricas 3×3

$$\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) = \{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid X^t = -X\}$$

com o produto interno

$$\langle A, B \rangle = tr(B^T A)$$

e base $\beta = \{E_1, E_2, E_3\}$ ortonormal dada por:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

temos que $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ é subálgebra de Lie de $M_3(\mathbb{R})$ com o colchete usual. Basta verificar que dados X, Y em $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$, temos $[X,Y]$ em $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$. De fato:

$$\begin{aligned} -[X,Y] &= -(XY - YX) \\ &= YX - XY \\ &= (X^TY^T)^T - (Y^TX^T)^T \\ &= (XY)^T - (YX)^T \\ &= (XY - YX)^T \\ &= [X,Y]^T \end{aligned}$$

Na verdade, obtivemos que $\mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ é subálgebra de Lie de $M_n(\mathbb{R})$. Considerando $\mathbb{R}^3$ com a base canônica formada por e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0) e e_3=(0,0,1), podemos definir um isomorfismo $T : \mathfrak{so}(3,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(E_1) = e_1,\ \ T(E_2) = e_2,\ \ T(E_3) = e_3$$

e utlizando deste isomorfismo para obter uma estrutura de Lie em $\mathbb{R}^3$, como mostrado no exemplo 3 anterior, obtemos que, para todos X e Y em $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$:

$$T([X,Y]) = T(X) \times T(Y)$$

onde $\times$ é o produto vetorial conhecido do $\mathbb{R}^3$. Ou seja, o colchete induzido pelo isomorfismo é o produto vetorial, e então $(\mathbb{R}^3, \times)$ é álgebra de Lie.

2. Considere o subespaço H de $M_3(\mathbb{R})$ dado por

$$H = Span\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Podemos verificar que $(H, [\ ,\ ])$ é subálgebra de $(M_3(\mathbb{R}), [\ ,\ ])$. De fato, considerando a base ordenada como $\{v_1, v_2, v_3\}$:

$$[v_1, v_2] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[v_1, v_3] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = v_2$$

$$[v_2, v_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pela propriedade antissimétrica, pelos cálculos acima concluímos que o colchete é fechado na base do espaço. Isso é suficiente para que ele seja subálgebra, pois dados quaisquer A,B $\in H$:

$$[A, B] = [\sum_{i=1}^{3} a_i v_i, \sum_{j=1}^{3} b_j v_j] = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i b_j [v_i, v_j].$$

Isso evidencia que a imagem do colchete é uma combinação linear do colchete aplicado nos vetores da base. Apesar de estarmos trabalhando com um espaço de dimensão 3, isto é válido para qualquer espaço vetorial de dimensão finita.

3. Seja S o subespaço vetorial de $M_3(\mathbb{R})$ dado por

$$S = Span \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Observe que:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e o resultado desse colchete não pertence a S. Assim, este subespaço não é subálgebra de Lie de ($M_3(\mathbb{R})$, [,]).

2.3 Ideais

Definição 3. *Seja* (V, [,]) *uma álgebra de Lie. Um subespaço* $H \subset V$ *é um* ***ideal*** *em* (V, [,]) *se* $\forall X \in H$ *e* $Y \in V$ *temos*

$$[X, Y] \in H$$

isto é:

$$[V, H] \subset H$$

Segue imediatamente da definição que todo ideal é uma subálgebra de Lie, já que o colchete é uma operação fechada em H.

A recíproca, no entanto, não é válida. Considere a subálgebra H de $M_3(\mathbb{R})$ dada por

$$H = Span\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Temos que

$$H_1 = Span\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

é subálgebra de H por ser unidimensional. No entanto:

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que não está em H_1.

2.4 Morfismos entre álgebras

Definição 4. *Sejam (V, [,]) e (W, [,]') álgebras de Lie. Uma transformação linear* $T : V \to W$ *é um homomorfismo entre as álgebras de Lie se* $\forall\ u, v \in V$*:*

$$T([u, v]) = [T(u), T(v)]'.$$

T será um isomorfismo entre as álgebras de Lie se for um homomorfismo inversível, isto é, injetora e sobrejetora. Caso V=W, dizemos que T é um automorfismo.

2.4.1 Exemplos

1. Dados uma álgebra de Lie (V, [,]) e W espaço vetorial, vimos no exemplo 3 da primeira seção que podemos induzir uma álgebra de lie em W através de um isomorfismo de espaços vetorias $T : V \longrightarrow W$. Segue da definição do colchete em W que (V, [,]) e (W, [,]') são álgebras de Lie isomorfas.

2. Como observado na seção anterior, temos que ($\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$, [,]) e ($\mathbb{R}^3, \times$) são álgebras isomorfas.

3. Temos que a função traço
$$tr : M_n(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$$
é um homomorfismo, onde consideramos $\mathbb{F}$ como álgebra de Lie abeliana.

Para quaisquer matrizes $X, Y \in M_n(\mathbb{F})$ temos $tr(XY) = tr(YX)$:

$$(XY)_{mm} = \sum_{k=1}^{n} X_{mk} Y_{km}$$

$$(YX)_{ll} = \sum_{r=1}^{n} Y_{lr} X_{rl}$$

e então

$$tr(XY) = \sum_{m=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} X_{mk} Y_{km})$$

$$\begin{aligned} tr(YX) &= \sum_{l=1}^{n} (\sum_{r=1}^{n} Y_{lr} X_{rl}) \\ &= \sum_{r=1}^{n} (\sum_{l=1}^{n} X_{rl} Y_{lr}) \end{aligned}$$

o que prova $tr(XY) = tr(YX)$. Seja $\alpha \in \mathbb{F}$. Também temos linearidade no traço:

$$\begin{aligned} tr(\alpha X + Y) &= \sum_{m=1}^{n} (\alpha X_{mm} + Y_{mm}) \\ &= \sum_{m=1}^{n} \alpha X_{mm} + \sum_{m=1}^{n} Y_{mm} \\ &= \alpha \sum_{m=1}^{n} X_{mm} + \sum_{m=1}^{n} Y_{mm} \\ &= \alpha tr(X) + tr(Y). \end{aligned}$$

Então, $tr([X, Y]) = tr(XY - YX) = tr(XY) - tr(YX) = 0$, e $[trX, trY] = 0$, pois $\mathbb{F}$ é álgebra de Lie abeliana.

4. Seja $\mathfrak{su}(2)$ subespaço vetorial real de $M_2(\mathbb{C})$ dado por

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \mid X^* = -X,\ tr(X) = 0\}$$

onde X^* denota a conjugada transposta de X. Temos que $(\mathfrak{su}(2),[\ ,\ ])$ é subálgebra de Lie de $(M_2(\mathbb{C}), [\ ,\ ])$. Dado $X \in \mathfrak{su}(2)$, podemos definir a transformação linear $ad_X : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{su}(2)$:

$$ad_X(Y) = [X, Y] = XY - YX$$

Vamos mostrar que $(\mathfrak{su}(2), [\ ,\ ])$ e $(\mathfrak{so}(3, \mathbb{R}), [\ ,\ ])$ são isomorfas. Considere em $\mathfrak{su}(2)$ o produto interno dado por

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} tr(B^* A)$$

e $\gamma = \{e_1, e_2, e_3\}$ base ortonormal de $\mathfrak{su}(2)$, onde:

$$e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

e a base $\beta = \{E_1, E_2, E_3\}$ de $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ dada por:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculando $[ad_{e_1}]_\gamma^\gamma$:

$$ad_{e_1}(e_1) = [e_1, e_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ad_{e_1}(e_2) = [e_1, e_2] = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 2e_3$$

$$ad_{e_1}(e_3) = [e_1, e_3] = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = -2e_2$$

Portanto:

$$[ad_{e_1}]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Considerando a base β de $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$, vemos que $[ad_{e_1}]_\gamma^\gamma = 2E_1$.

Calculando $[ad_{e_2}]_\gamma^\gamma$:

$$ad_{e_2}(e_1) = [e_2, e_1] = -[e_1, e_2] = -2e_3$$

$$ad_{e_2}(e_2) = [e_2, e_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$ad_{e_2}(e_3) = [e_2, e_3] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2e_1$$

Portanto:

$$[ad_{e_2}]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e então $[ad_{e_2}]_\gamma^\gamma = 2E_2$.

Calculando $[ad_{e_3}]_\gamma^\gamma$:

$$\begin{aligned} ad_{e_3}(e_1) &= [e_3, e_1] = -[e_1, e_3] = 2e_2 \\ ad_{e_3}(e_2) &= [e_3, e_2] = -[e_2, e_3] = -2e_1 \\ ad_{e_3}(e_3) &= [e_3, e_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto:

$$[ad_{e_3}]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e então $[ad_{e_3}]_\gamma^\gamma = 2E_3$. Assim, definimos o isomorfismo $T : \mathfrak{su}(2) \longrightarrow \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ dado por:

$$T(e_i) = 2E_i, \quad i = 1, 2, 3$$

Se $X = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \in \mathfrak{su}(2)$, considerando a linearidade do colchete obtemos que:

$$[ad_X]_\gamma^\gamma = \alpha_1 [ad_{e_1}]_\gamma^\gamma + \alpha_2 [ad_{e_2}]_\gamma^\gamma + \alpha_3 [ad_{e_3}]_\gamma^\gamma$$

e então

$$T(X) = [ad_X]_\gamma^\gamma$$

Vamos verificar que para todos X e Y em $\mathfrak{su}(2)$ temos $T([X, Y]) = [T(X), T(Y)]$. Considerando que $X = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ e $Y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$, e utilizando as propriedades do colchete:

$$\begin{aligned} T([X, Y]) &= T([\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3]) \\ &= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)T([e_1, e_2]) + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)T([e_1, e_3]) + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)T([e_2, e_3]) \\ &= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)T(2e_3) + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)T(-2e_2) + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)T(2e_1) \\ &= 4(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)E_3 - 4(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)E_2 + 4(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)E_1 \\ &= 4\lambda_1 E_3 - 4\lambda_2 E_2 + 4\lambda_3 E_1 \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} [T(X), T(Y)] &= [\alpha_1 T(e_1) + \alpha_2 T(e_2) + \alpha_3 T(e_3), \beta_1 T(e_1) + \beta_2 T(e_2) + \beta_3 T(e_3)] \\ &= \lambda_1 [T(e_1), T(e_2)] + \lambda_2 [T(e_1), T(e_3)]) + \lambda_3 [T(e_2), T(e_3)] \\ &= 4\lambda_1 [E_1, E_2] + 4\lambda_2 [E_1, E_3]) + 4\lambda_3 [E_2, E_3] \end{aligned}$$

De fato:

$$[E_1,E_2]=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}=E_3$$

$$[E_1,E_3]=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}=-E_2$$

$$[E_2,E_3]=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}=E_1$$

e portanto temos $T([X,Y])=[T(X),T(Y)]$, mostrando que $(\mathfrak{su}(2),[\ ,\ ])$ e $(\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}),[\ ,\ ])$ são isomorfas.

5. Considerando o subespaço vetorial de $M_2(\mathbb{R})$

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})=\{A\in M_2(\mathbb{R}):tr(A)=0\}$$

temos que $(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}),[\ ,\ ])$ é álgebra de Lie. De fato, vimos que $tr([X,Y])=0$, $\forall\ X,Y$ em $M_n(\mathbb{F})$. Tomando a base $\beta=\{\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3\}$ dada por:

$$\epsilon_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \epsilon_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \epsilon_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

vemos que este espaço tem a mesma dimensão de $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$, o que pode sugerir um isomorfismo entre as álgebras de Lie. No exemplo anterior, vimos que $(\mathfrak{su}(2),[\ ,\ ])$ e $(\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}),[\ ,\ ])$ são isomorfas através da transformação $ad:X\longrightarrow[ad_X]_\gamma^\gamma$, onde γ é uma base de $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$. Suponhamos que exista um isomorfismo $T:\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\longrightarrow\mathfrak{su}(2)$ entre estas álgebras de Lie. Vamos construir a matriz $[ad_{\epsilon_1}]_\beta^\beta$:

$$[\epsilon_1,\epsilon_1]=0$$

$$[\epsilon_1,\epsilon_2]=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=2\epsilon_2$$

$$[\epsilon_1,\epsilon_3]=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-2\epsilon_3$$

Portanto:

$$[ad_{\epsilon_1}]_\beta^\beta=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

Pelo isomorfismo, temos que $\{T(\epsilon_1), T(\epsilon_2), T(\epsilon_3)\}$ é base de $\mathfrak{su}(2)$. Também pelo isomorfismo entre as álgebras de Lie sabemos que $T \circ ad_{\epsilon_1} = ad_{T(\epsilon_1)} \circ T$, e portanto $[ad_{T(\epsilon_1)}]_\beta^\beta = T[ad_{\epsilon_1}]_\beta^\beta T^{-1}$, onde T é considerada na forma matricial.
Ou seja, $[ad_{T(\epsilon_1)}]_\beta^\beta$ e $[ad_{\epsilon_1}]_\beta^\beta$ possuem os mesmos autovalores. Pelo que vimos de $ad : X \longrightarrow [ad_X]_\gamma^\gamma$, sabemos que $[ad_T(\epsilon_1)]_\beta^\beta \in \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$.
No entanto, **matrizes antissimétricas não possuem autovalores reais não-nulos**. De fato, considere $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A^T = -A$, v um autovetor de A, $A = \lambda v$ e $\langle\, , \rangle$ produto interno usual do $\mathbb{R}^n$:

$$\langle Av, v\rangle = \lambda\langle v, v\rangle.$$

Por outro lado:

$$\langle Av, v\rangle = \langle v, A^T v\rangle = \langle v, -Av\rangle = -\lambda\langle v, v\rangle.$$

Assim, $\lambda = -\lambda$ e então $\lambda = 0$. Concluímos então que tal isomorfismo T não pode existir, e como consequência $\mathfrak{sl}(2)$ **e** $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ **não são álgebras de Lie isomorfas**. É interessante notar que o argumento se baseia em propriedades que devem ser preservadas pelo isomorfismo. Para qualquer matriz A em $\mathfrak{sl}(2)$, teríamos $T \circ ad_A = ad_{T(A)} \circ T$. Como $[ad_{T(A)}]_\beta^\beta \in \mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$, para mostrar que o isomorfismo T não pode existir, foi suficiente encontrar uma matriz A tal que $[ad_{T(A)}]_\beta^\beta$ não respeita as características intrínsecas deste espaço.

2.4.2 Constantes de estrutura

Seja $(V, [\ ,\ ])$ álgebra de Lie e $\{v_1, ..., v_n\}$ base de V. Dados $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ temos:

$$[v_i, v_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k v_k \quad , \text{para alguns} \quad C_{ij}^k \in \mathbb{F}.$$

Os coeficientes C_{ij}^k são chamados **constantes de estrutura** da álgebra em relação à esta base.
Seja $(W, [\ ,\ ]')$ uma álgebra de Lie com base $\{w_1, ..., w_n\}$, que possui as mesmas constantes de estrutura de V. Podemos definir um isomorfismo linear $\psi : V \longrightarrow W$ dado por $\psi(v_i) = w_i$, $\forall i \in \{1, .., n\}$. Dados $X = \sum_i^n a^i v_i$ e $Y = \sum_j^n b^j v_j$ em V:

$$\begin{aligned}
\psi([X, Y]) &= \psi([\sum_i a^i v_i, \sum_j b^j v_j]) \\
&= \sum_{i,j} a^i b^j \psi([v_i, v_j]) \\
&= \sum_{i,j,k} a^i b^j C_{ij}^k \psi(v_k) \\
&= \sum_{i,j,k} a^i b^j C_{ij}^k w_k.
\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}[\psi(X), \psi(Y)]' &= [\sum_i a^i \psi(v_i), \sum_j b^j \psi(v_j)]' \\ &= [\sum_i a^i w_i, \sum_j b^j w_j]' \\ &= \sum_{i,j} a^i b^j [w_i, w_j]' \\ &= \sum_{i,j,k} a^i b^j C_{ij}^k w_k.\end{aligned}$$

Portanto, $\psi([X,Y]) = [\psi(X), \psi(Y)]'$, mostrando que $(V, [\ ,\ ])$ e $(W, [\ ,\ ]')$ são isomorfas.
Da antissimetria do colchete e da identidade de Jacobi obtemos que

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k$$

$$\sum_l^n (C_{ij}^l C_{lk}^m + C_{jk}^l C_{li}^m + C_{ki}^l C_{lj}^m) = 0 \quad \forall\, i,j,k,m \in \{1,...,n\}.$$

Se considerarmos constantes C_{ij}^k satisfazendo as duas igualdades acima, e partirmos de uma base $\{u_1, ..., u_n\}$ de um espaço vetorial U e definirmos o colchete em U como

$$[u_i, u_j]'' = \sum_k^n C_{ij}^k u_k$$

obteremos uma álgebra de Lie $(U, [\ ,\ ]'')$ cujas constantes de estrutura são exatamente C_{ij}^k. Ou seja, essa álgebra será isomorfa a $(V, [\ ,\ ])$. Assim, temos que **as constantes de estrutura determinam a álgebra de Lie**, a menos de isomorfismo.
Claramente, este nem sempre é o melhor método para verificar se duas álgebras são ou não isomorfas, pois muitos cálculos devem ser feitos e tudo depende da escolha da base. No entanto, obtemos mais uma forma de comparar álgebras, e até mesmo como construir uma álgebra isomorfa à outra qualquer.

3 Formas Bilineares

Para esta seção, nos baseamos no Capítulo 10 do livro *Linear Algebra - Kenneth Hoffman, Ray Kunze*, [3].
Uma forma bilinear em um espaço vetorial $V(\mathbb{F})$ é uma função f

$$f : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$$

que leva um par (u, v) em um escalar do corpo, e é uma aplicação bilinear. Isto é, dados u, v, $w \in V$ e α, $\beta \in \mathbb{F}$:

$$\begin{aligned} f(\alpha u + v, w) &= \alpha f(u, w) + f(v, w) \\ f(u, \beta v + w) &= \beta f(u, v) + f(u, w). \end{aligned}$$

É fácil verificar que uma combinação linear de formas bilineares resulta numa forma bilinear. Assim, faz sentido pensarmos no espaço vetorial das formas bilineares em V, e o denotaremos por $L(V, V, \mathbb{F})$.

3.1 Exemplos

1. Sejam T_1 e T_2 operadores lineares em V. Definimos

$$f(u, v) = T_1(u)T_2(v)$$

e obtemos que f é uma forma bilinear.

2. Na primeira seção utilizamos diferentes produtos internos em espaços de matrizes. Segue das propriedades da função produto interno que esta é uma forma bilinear.

3. Sejam m e n naturais e $\mathbb{F}$ um corpo. Seja V o espaço das matrizes $m \times n$ sobre $\mathbb{F}$ e tome $A \in M_m(\mathbb{F})$. Podemos definir em V

$$f_A(X, Y) = X^T AY.$$

Segue das propriedades de matrizes que f_A é uma forma bilinear em V.
Se considerarmos um espaço vetorial de dimensão finita $V(\mathbb{F})$ qualquer com base ordenada $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ e uma forma bilinear f em V, temos que:

$$\begin{aligned} f(u, v) &= f(\textstyle\sum_i a_i\alpha_i, \sum_j b_j\alpha_j) \\ &= \textstyle\sum_i \sum_j a_i b_j f(\alpha_i, \alpha_j). \end{aligned}$$

Definindo $A_{ij} = f(\alpha_i, \alpha_j)$, segue que

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \textstyle\sum_i \sum_j A_{ij} a_i b_j \\ &= X^T AY \end{aligned}$$

onde X e Y são os vetores coordenada de u e v em α.

Definição 5. *Seja $V(\mathbb{F})$ espaço vetorial de dimensão finita e $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ base ordenada de V. A matriz de uma forma bilinear f na base ordenada β é a matriz A $n \times n$ de entradas $a_{ij} = f(\alpha_i, \alpha_j)$.*

Denotaremos esta matriz como $[f]_\alpha$.

Teorema 1. *Seja $V(\mathbb{F})$ espaço vetorial de dimensão finita e β uma base ordenada de V. A função que associa cada forma bilinear f à sua matriz $[f]_\beta$ é um isomorfismo entre $L(V, V, \mathbb{F})$ e $M_n(\mathbb{F})$.*

Pelo que foi observado no exemplo 3, fica claro que $f \longrightarrow [f]_\beta$ é uma correspondência biunívoca. Assim, resta verificar que ela é linear. Uma vez que $\forall\ u,\ v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{F}$ temos

$$(\alpha f + g)(u, v) = \alpha f(u, v) + g(u, v)$$

isso implicará que

$$[\alpha f + g]_\beta = \alpha [f]_\beta + [g]_\beta.$$

3.2 Mudança de base

Sejam $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ e $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$ bases de $V(\mathbb{F})$. Seja f uma forma bilinear em V. Vamos entender a relação entre $[f]_\alpha$ e $[f]_\gamma$.
Seja P a matriz invertível $n \times n$ tal que $[u]_\alpha = P[u]_\gamma$, $\forall\ u \in V$. Para quaisquer $u,\ v \in V$:

$$\begin{aligned} f(u, v) &= [u]_\alpha^T [f]_\alpha [v]_\alpha \\ &= (P[u]_\gamma)^T [f]_\alpha P [v]_\gamma \\ &= [u]_\gamma^T (P^T [f]_\alpha P) [v]_\gamma \end{aligned}$$

e segue da unicidade da matriz de f na base γ que

$$[f]_\gamma = P^T [f]_\alpha P.$$

Podemos verificar, como consequência desta fórmula de mudança de base, que se A e B são matrizes $n \times n$ que representam f em duas bases diferentes, então

$$dim\ \ Im(A) = dim\ \ Im(B).$$

De fato, se $B = P^T A P$ com P invertível, as transformações

$$\begin{aligned} Ker\, A &\longrightarrow Ker\, B \\ X &\longmapsto P^{-1} X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ker\, B &\longrightarrow Ker\, A \\ X &\longmapsto P X \end{aligned}$$

são injetoras, e portanto estas matrizes têm kernels de mesma dimensão, implicando que o mesmo ocorra com as imagens.

Em especial, isso nos possibilita definir a dimensão da imagem de uma forma bilinear, comumente denotada por $rank(f)$, como sendo a dimensão da imagem de qualquer matriz que representa f em alguma base.

3.3 Rank de uma forma bilinear

Com uma forma bilinear f em $V(\mathbb{F})$, se fixarmos uma das entradas, obtemos um funcional linear: fixando u, por exemplo, obtemos um funcional linear $f(\overline{u}, v)$ em v. Assim, cada u determina um funcional linear em V. Vamos denotá-lo por $L_f(u)$. Isso define a aplicação $u \longrightarrow L_f(u)$ de V em V^*, seu espaço dual.
Da linearidade de f segue que

$$L_f(\alpha v + w) = f(\overline{u}, \alpha v + w) = \alpha f(\overline{u}, v) + f(\overline{u}, w) = \alpha L_f(v) + L_f(w)$$

e então L_f é uma transformação linear de V em V^*. Analogamente, fixando v obtemos um funcional linear em u, $f(u, \overline{v})$, e podemos definir $R_f(v)$ como o funcional linear em V cujo valor em u é $f(u, \overline{v})$.

Teorema 2. *Seja $V(\mathbb{F})$ espaço vetorial de dimensão finita e f uma forma bilinear em V. Sejam L_f e R_f as transformações lineares de V em V^* definidas por $(L_f u)(v) = f(u, v) = (R_f v)(u)$. Então, $rank(L_f) = rank(R_f)$.*

Demonstração. Lembremos que, dado uma matriz A, a dimensão do seu espaço-linha é igual a do seu espaço-coluna. Mostraremos que os kernels de L_f e R_f têm a mesma dimensão, e o resultado segue imediatamente.
Seja α base ordenada de V e $A = [f]_\alpha$. Sejam u e $v \in V$, com vetores coordenada X e Y respectivamente nesta base. Se $R_f(v) = 0$, então $X^T AY = 0$, $\forall\ u$ em V. Ou seja, $AY = \overline{0}$ e a dimensão do kernel de R_f é a mesma que a do espaço de soluções de $AY = \overline{0}$.
Analogamente, se $L_f(u) = 0$, então $X^T AY = 0$, $\forall\ v$ em V. Daí, devemos ter $X^T A = \overline{0}$, o que ocorre se e só se $A^T X = \overline{0}$. Assim, a dimensão do kernel de L_f é a mesma que a do espaço de soluções de $A^T X = \overline{0}$.
Como o espaço-linha e o espaço-coluna de A têm a mesma dimensão, segue que o mesmo ocorre com os kernels de R_f e L_f, e portanto também com seus ranks. ■

Definição 6. *Seja f forma bilinear em $V(\mathbb{F})$. Definimos o* ***rank*** *de f como sendo o inteiro n = rank(L_f) = rank(R_f). Ainda, n = rank($[f]_\beta$), onde β é qualquer base ordenada de V.*

Corolário 1. *Seja f forma bilinear em $V(\mathbb{F})$, espaço vetorial de dimensão n. São equivalentes:*

- *rank(f) = n.*
- *Para cada vetor não-nulo $u \in V$, há um vetor v em V tal que $f(u, v) \neq 0$.*
- *Para cada vetor não-nulo $v \in V$, há um vetor u em V tal que $f(u, v) \neq 0$.*

Definição 7. *Uma forma bilinear f em um espaço vetorial $V(\mathbb{F})$ é dita* ***não-degenerada*** *se satisfaz as duas últimas condições do corolário anterior. Se V tem dimensão finita, então ela será não-degenerada se satisfizer qualquer uma das condições.*

3.4 Formas bilineares simétricas

Seja f uma forma bilinear em um espaço vetorial de dimensão finita $V(\mathbb{F})$. É possível mostrar que existe uma base β de V na qual $[f]_\beta$ é diagonal se, e somente se f for simétrica, isto é, $f(u,v) = f(v,u)$, $\forall$ u, v em V. Consideraremos o caso em que $\mathbb{F}$ é um corpo de característica zero.

Definição 8. *Seja f uma forma bilinear em um espaço vetorial de dimensão finita $V(\mathbb{F})$. Dizemos que f é **simétrica** se $f(u,v) = f(v,u)$, $\forall$ u, v em V.*

Como $f(u,v) = X^TAY$, onde X é o vetor coordenada de u e Y o vetor coordenada de v na base β:

$$f(u,v) = X^TAY = (X^TAY)^T = Y^TA^TX$$

pois $f(u,v)$ é um escalar. Daí:

$$f(u,v) = f(v,u) \iff Y^TA^TX = Y^TAX \iff A = A^T.$$

Assim, fica claro que se $[f]_\beta$ for uma matriz diagonal (e portanto simétrica), então a forma será simétrica.
Considerando f como uma forma bilinear simétrica, podemos definir sua **forma quadrática associada** q de V em $\mathbb{F}$ como

$$q(u) = f(u,u)$$

Se $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$, a forma f é completamente determinada pela sua forma quadrática, da seguinte maneira:

$$f(u,v) = \frac{q(u+v)}{4} - \frac{q(u-v)}{4}.$$

Esta expressão é comumente chamada de **identidade de polarização**.

É interessante notar que um produto interno $\langle\, , \rangle$ em um espaço vetorial real é uma forma bilinear simétrica. Também perceba que é uma forma não-degenerada. Além disso, para todo vetor $u \neq 0$ temos

$$\langle u, u\rangle > 0.$$

Uma forma bilinear com essa propriedade é dita **positiva-definida**. Dois vetores u e v são chamados **ortogonais** com respeito a f se $f(u,v) = 0$.

Teorema 3. *Seja V espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica zero, e f uma forma bilinear simétrica em V. Então, existe uma base α na qual f é representada por uma matriz diagonal.*

Demonstração. Se $f = 0$ ou $n = 1$, o teorema é verdadeiro. Suponhamos $f \neq 0$ e $n > 1$, e utilizaremos indução. Pela identidade de polarização, como f não é nula, existe $u \in V$ tal que $q(u) \neq 0$. Seja $W = Span\{u\}$ e $W^\perp$ o conjunto dos vetores v tais que $f(u,v) = 0$. Mostraremos que $V = W \oplus W^\perp$.

Como $q(u) \neq 0$, segue que $W \cap W^{\perp} = 0$. Seja w um vetor qualquer em V, definimos

$$t = w - \frac{f(w,u)}{f(u,u)}u$$

Daí

$$f(u,t) = f(u,w) - \frac{f(w,u)}{f(u,u)}f(u,u) = 0$$

e então $t \in W^{\perp}$. Como temos

$$w = t + \frac{f(w,u)}{f(u,u)}u$$

isso mostra que $V = W \oplus W^{\perp}$.

Por fim, como a restrição de f a $W^{\perp}$ é uma forma bilinear simétrica e $dim\, W^{\perp} = n-1$, temos pela hipótese de indução que existe uma base $\alpha' = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ de $W^{\perp}$ na qual f é representada por uma matriz diagonal. Note que, tomando $\alpha_n = u$, $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\}$ é base de V tal que

$$f(\alpha_i, \alpha_j) = 0\,,\ i \neq j$$

e portanto esta é a base que procuramos. ■

Corolário 2. *Se $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ e $A \in M_n(\mathbb{F})$ é simétrica, então existe uma matriz invertível $P \in M_n(\mathbb{F})$ tal que $P^T AP$ é uma matriz diagonal.*

Teorema 4. *Seja $V(\mathbb{C})$ espaço vetorial de dimensão finita. Seja f uma forma bilinear simétrica em V tal que $rank(f) = r$. Então, existe uma base $\beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ de V tal que*

1. *A matriz $[f]_\beta$ é diagonal.*

2. $$\begin{aligned} f(\beta_j, \beta_j) &= 1,\ \text{se } j \in \{1, \ldots, r\} \\ f(\beta_j, \beta_j) &= 0,\ \text{se } j > r. \end{aligned}$$

Demonstração. Sabemos, pelo teorema anterior, que existe uma base $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de V tal que $f(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ se $i \neq j$. Como $rank(f) = r$, $rank([f]_\alpha) = r$, e portanto $f(\alpha_j, \alpha_j) \neq 0$ para exatamente r valores de j. Reordenando os vetores nesta base, podemos assumir que $f(\alpha_j, \alpha_j) \neq 0$ caso $j \in \{1, \ldots, r\}$. Tomamos

$$\beta_j = \frac{1}{\sqrt{f(\alpha_j, \alpha_j)}},\ \text{se } j \in \{1, \ldots, r\}$$

e

$$\beta_j = \alpha_j,\ \text{se } j > r$$

Com simples cálculos verifica-se que $\beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ é a base que procuramos. ■

Perceba que o teorema 4 é válido para qualquer subcorpo de $\mathbb{C}$ no qual cada elemento possui raiz quadrada.

Teorema 5. *Seja $V(\mathbb{R})$ espaço vetorial real de dimensão finita e f uma forma bilinear simétrica em V com $rank(f) = r$. Então, existe uma base $\gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ na qual $[f]_\gamma$ é diagonal e*

$$f(\gamma_j, \gamma_j) = \pm 1, \text{ se } j \in \{1, \ldots, r\}$$

Além disso, o número de vetores γ_j tais que $f(\gamma_j, \gamma_j) = 1$ é independente da escolha da base.

Demonstração. Pelo que foi visto anteriormente, existe uma base $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ de V na qual

$$\begin{aligned} f(\beta_i, \beta_j) &= 0, \text{ se } i \neq j \\ f(\beta_i, \beta_j) &\neq 0, \text{ se } 1 \leq j \leq r \\ f(\beta_i, \beta_j) &= 0, \text{ se } j > r. \end{aligned}$$

Tomamos:

$$\gamma_j = \frac{\beta_j}{\sqrt{|f(\beta_j, \beta_j)|}}, \text{ se } 1 \leq j \leq r$$

e

$$\gamma_j = \beta_j, \text{ se } j > r.$$

Seja p o número de vetores γ_j tais que $f(\gamma_j, \gamma_j) = 1$. Seja V^+ o subespaço gerado por estes vetores e V^- o subespaço gerado pelos vetores γ_j tais que $f(\gamma_j, \gamma_j) = -1$. Temos $p = dim\, V^+$. Note que se $u \in V^+$, então $f(u, u) \geq 0$. Analogamente, se $v \in V^-$, então $f(v, v) \leq 0$. Seja $V^\perp$ o subespaço gerado pelos vetores γ_j tais que $f(\gamma_j, \gamma_j) = 0$. Se $w \in V^\perp$, então $f(u, w) = 0$, $\forall$ u em V. Como γ é base de V, segue que

$$V = V^+ \oplus V^- \oplus V^\perp.$$

Temos ainda que se W é qualquer subespaço de V onde f é positiva-definida, então W, V^- e $V^\perp$ são independentes. Isso significa que a dimensão de um subespaço onde f seja positiva-definida não pode exceder a de V^+. De fato, tome $u_1 \in W$, $u_2 \in V^-$ e $u_3 \in V^\perp$ tais que $u_1 + u_2 + u_3 = 0$, então:

$$0 = f(u_1, u_1 + u_2 + u_3) = f(u_1, u_1) + f(u_1, u_2) + f(u_1, u_3)$$

e

$$0 = f(u_2, u_1 + u_2 + u_3) = f(u_2, u_1) + f(u_2, u_2) + f(u_2, u_3).$$

Como $u_3 \in V^\perp$, $f(u_1, u_3) = f(u_2, u_3) = 0$, e utilizando o fato de f ser simétrica temos:

$$0 = f(u_1, u_1) + f(u_1, u_2) = f(u_2, u_2) + f(u_2, u_1) \Longleftrightarrow f(u_1, u_1) = f(u_2, u_2).$$

Mas como $f(u_1, u_1) \geq 0$ e $f(u_2, u_2) \leq 0$, temos $u_1 = u_2 = 0$, e consequentemente $u_3 = 0$. Já que $V = V^+ \oplus V^- \oplus V^\perp$, então $dim\, W \leq dim\, V^+$. Portanto, se η for outra base satisfazendo as condições do teorema, teríamos outros espaços análogos V_1^+, V_1^- e $V_1^\perp$ com $dim\, V_1^+ \leq dim\, V^+$ e, pelo mesmo argumento, $dim\, V^+ \leq dim\, V_1^+$. Assim, $dim\, V^+ = dim\, V_1^+$ e isso prova a unicidade de p. ■

Perceba que $V^\perp$ é o subespaço dos vetores que são ortogonais a todos os outros com respeito a f. Se $u \in V$ é tal que $f(u,v) = 0$, $\forall v \in V$, então $u \in V^\perp$. Assim, $V^\perp$ é único. Temos

$$dim\, V^\perp = dim\, V - (dim\, V^+ \,+\, dim\, V^-) = dim\, V \,-\, rank(f).$$

Como visto anteriormente, os subespaços V^+ e V^- não são únicos. No entanto, suas dimensões são únicas. Qualquer subespaço em que f seja positiva-definida tem dimensão menor ou igual a de V^+, e um subespaço em que ela seja negativa-definida tem dimensão menor ou igual a de V^-.

É notável que

$$rank(f) = dim\, V^+ \,+\, dim\, V^-$$

e chamamos o número $dim\, V^+ \,-\, dim\, V^-$ de **assinatura de f**.

Ainda sobre o teorema 5, ele mostra que **um produto interno em um espaço vetorial real de dimensão finita pode ser representado, em alguma base, pela matriz identidade.**

4 Métricas ad-invariantes

Definição 9. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{F}$ Entenderemos como **métrica** uma forma bilinear B sobre V que seja simétrica e não-degenerada.*

Por exemplo, em um espaço $V(\mathbb{F})$ de dimensão n, qualquer matriz $A_{n\times n}$ simétrica com $det(A) \neq 0$ define uma métrica. Em particular, um produto interno é uma métrica.

Lembremos que, dada uma álgebra de Lie $(V, [\ ,\ ])$ e $X \in V$, podemos definir a transformação linear

$$ad_X(Y) = [X, Y] \quad \forall Y \in V.$$

Definição 10. *Seja $V(\mathbb{F})$ um espaço vetorial, $(V, [\ ,\ ])$ álgebra de Lie e B uma forma bilinear em V. Dizemos que B é **ad-invariante** se*

$$B(ad_X(Y), Z) + B(Y, ad_X(Z)) = 0$$

$\forall\ X, Y$ e Z em V.

4.1 Exemplos

1. Voltando a $\mathfrak{su}(2)$ subálgebra de Lie de $M_2(\mathbb{C})$ dada por

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \mid X^* = -X,\ tr(X) = 0\}$$

temos que

$$\langle X, Y\rangle = \frac{1}{2}tr(Y^*X)$$

é um produto interno neste espaço, e portanto uma métrica.

Vamos mostrar que este produto interno é uma métrica ad-invariante em $\mathfrak{su}(2)$. Sejam X, Y e Z em $\mathfrak{su}(2)$. Utilizando propriedades do traço e o fato das matrizes serem anti-hermitianas:

$$\begin{aligned}
\langle ad_X(Y), Z\rangle &= \frac{1}{2}tr(Z^*(XY - YX)) \\
&= \frac{1}{2}tr(Z^*XY - Z^*YX) \\
&= \frac{1}{2}tr(Z^*XY) - \frac{1}{2}tr((Z^*Y)X) \\
&= -\frac{1}{2}tr(Z^*X^*Y) - \frac{1}{2}tr(X(Z^*Y)) \\
&= -\frac{1}{2}tr(Z^*X^*Y) + \frac{1}{2}tr(X^*Z^*Y)) \\
&= -\frac{1}{2}tr(Z^*X^*Y - X^*Z^*Y) \\
&= -\frac{1}{2}tr((XZ - ZX)^*Y)
\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\langle Y, ad_X(Z)\rangle = \frac{1}{2}tr((XZ - ZX)^*Y)$$

o que evidencia

$$\langle ad_X(Y), Z\rangle + \langle Y, ad_X(Z)\rangle = 0.$$

Notemos que isso já era esperado. A igualdade acima nos diz que ad_X é uma transfomação antissimétrica. Isso se deve ao que vimos anteriormente, sobre o isomorfismo de álgebras de Lie entre $\mathfrak{su}(2)$ e o espaço real de matrizes 3×3 antissimétricas $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ dado por

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{su}(2) &\longrightarrow \mathfrak{so}(3, \mathbb{R}) \\ X &\longmapsto ad_X. \end{aligned}$$

2. Considere a subálgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \subset M_2(\mathbb{R})$ dada pelo subespaço

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \,|\, tr(A) = 0\}$$

com base $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ onde

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e a forma bilinear simétrica dada por

$$B(X, Y) = -tr(XY).$$

Vamos construir a matriz de representação de B a partir da base acima:

$$B(e_1, e_1) = -tr(e_1 e_1) = -tr \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

$$B(e_1, e_2) = -tr(e_1 e_2) = -tr \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$B(e_1, e_3) = -tr(e_1 e_3) = -tr \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$B(e_2, e_2) = -tr(e_2 e_2) = -tr \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$B(e_2, e_3) = -tr(e_2, e_3) = -tr \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$B(e_3, e_3) = -tr(e_3, e_3) = -tr \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Claramente $B(X, Y)$ é simétrica. Portanto:

$$[B]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Claramente B é não-degenerada. Vamos verificar que B também é ad-invariante. Sejam X, Y e Z em $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} B(ad_X(Y), Z) &= -tr((XY - YX)Z) \\ &= -tr(XYZ - YXZ) \\ &= -tr((XY)Z)) + tr(Y(XZ)) \\ &= -tr(Z(XY)) + tr((XZ)Y) \\ &= -tr((ZX)Y - (XZ)Y) \\ &= -tr((ZX - XZ)Y) \\ &= -tr((-XZ + ZX)Y) \\ &= tr((XZ - ZX)Y). \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$B(Y, ad_X(Z)) = -tr((XZ - ZX)Y)$$

e claramente $B(ad_X(Y), Z) + B(Y, ad_X(Z)) = 0$.
Note que não foram utilizadas propriedades do espaço $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, mas sim propriedades da função traço. Podemos concluir que $B(X, Y)$ será uma métrica ad-invariante em qualquer espaço matricial em que seja não-degenerada.

3. Vamos encontrar a matriz de representação da forma anterior $B(X, Y) = -tr(XY)$ em $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$

$$\mathfrak{so}(3,\mathbb{R}) = \{X \in M_3(\mathbb{R}) \mid X^t = -X\}$$

com base γ

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos:

$$B(E_1, E_1) = -tr(E_1E_1) = -tr\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$B(E_1, E_2) = -tr(E_1E_2) = -tr\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$B(E_1, E_3) = -tr(E_1E_3) = -tr\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$B(E_2, E_3) = -tr(E_2E_3) = -tr\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$B(E_2, E_2) = -tr(E_2E_2) = -tr \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$B(E_3, E_3) = -tr(E_3E_3) = -tr \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Portanto:

$$[B]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

e como claramente B é não-degenerada, temos que esta é uma métrica ad-invariante em $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$.

4.2 Forma de Cartan-Killing

Agora que as ideias principais sobre formas bilineares e métricas ad-invariantes já foram introduzidas, podemos estudar uma das formas mais relevantes no contexto de álgebras de Lie, a chamada forma de Cartan-Killing. Veremos que através dela é possível determinar características importantes sobre a álgebra em questão.

Seja $V(\mathbb{F})$ espaço vetorial de dimensão finita e $(V,[\ ,\ ])$ álgebra de Lie. Lembramos que, dado $X \in V$, podemos definir a transformação linear $ad_X : V \longrightarrow V$ dada por

$$ad_X(Y) = [X, Y] \quad \forall Y \in V.$$

Definimos a **forma de Cartan-Killing**, forma bilinear em V, como:

$$\kappa(X, Y) = \text{traço}(ad_X ad_Y)$$

Segue das propriedades da função traço que esta é uma forma **simétrica**.

1. Vamos encontrar a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ com a base $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ onde

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primeiro, precisamos encontrar as matrizes $[ad_{e_1}]_\beta^\beta$, $[ad_{e_2}]_\beta^\beta$ e $[ad_{e_3}]_\beta^\beta$.
Encontrando $[ad_{e_1}]_\beta^\beta$:

$$[e_1, e_1] = 0$$

$$[e_1, e_2] = e_1e_2 - e_2e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2e_2$$

$$[e_1, e_3] = e_1e_3 - e_3e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -2e_3.$$

Assim:

$$[ad_{e_1}]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Encontrando $[ad_{e_2}]_\beta^\beta$:

$$[e_2, e_1] = -[e_1, e_2] = -2e_2$$

$$[e_2, e_2] = 0$$

$$[e_2, e_3] = e_2e_3 - e_3e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = e_1.$$

Portanto:

$$[ad_{e_2}]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Encontrando $[ad_{e_3}]_\beta^\beta$:

$$[e_3, e_1] = -[e_1, e_3] = 2e_3$$

$$[e_3, e_2] = -[e_2, e_3] = -e_1$$

$$[e_3, e_3] = 0.$$

Logo:

$$[ad_{e_3}]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Agora, temos o necessário para calcular a matriz da forma de Cartan-Killing.

$$\kappa(e_1, e_1) = tr(ad_{e_1}ad_{e_1}) = tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 8$$

$$\kappa(e_1, e_2) = tr(ad_{e_1}ad_{e_2}) = tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\kappa(e_1, e_3) = tr(ad_{e_1}ad_{e_3}) = tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\kappa(e_2, e_2) = tr(ad_{e_2}ad_{e_2}) = tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\kappa(e_2,e_3) = tr(ad_{e_2}ad_{e_3}) = tr\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

$$\kappa(e_3,e_3) = tr(ad_{e_3}ad_{e_3}) = tr\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Assim, temos que:

$$[\kappa]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

que claramente é não-degenerada.

2. Voltando a $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ com base $\gamma = \{E_1, E_2, E_3\}$ dada por:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

encontraremos sua forma de Cartan-Killing. Temos:

$$[ad_{E_1}]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ [ad_{E_2}]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ [ad_{E_3}]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim:

$$\kappa(E_1,E_1) = tr(ad_{E_1}ad_{E_1}) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -2$$

$$\kappa(E_1,E_2) = tr(ad_{E_1}ad_{E_2}) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\kappa(E_1,E_3) = tr(ad_{E_1}ad_{E_3}) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\kappa(E_2,E_2) = tr(ad_{E_2}ad_{E_2}) = tr\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -2$$

$$\kappa(E_2,E_3) = tr(ad_{E_2}ad_{E_3}) = tr\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\kappa(E_3, E_3) = tr(ad_{E_3} ad_{E_3}) = tr \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2.$$

Portanto:

$$[\kappa]_\gamma^\gamma = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

que evidentemente também é não-degenerada.

3. Considere a subálgebra de Lie $\mathfrak{osc} \subset \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ dada por:

$$\mathfrak{osc} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & -x_1 & 0 \\ x_3 & x_1 & 0 & 0 \\ -2x_4 & x_3 & -x_2 & 0 \end{pmatrix} | x_i \in \mathbb{R}, \ 1 \leq i \leq 4 \right\}$$

com base $\alpha = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ onde:

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Os colchetes não-nulos da base são dados por:

$$[e_1, e_2] = e_3 \ , \ [e_1, e_3] = -e_2 \ , \ [e_2, e_3] = e_4$$

e então:

$$[ad_{e_1}]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , [ad_{e_2}]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , [ad_{e_3}]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[ad_{e_4}]_\alpha^\alpha = \overline{0}.$$

Obtemos $\kappa(e_1, e_1) = -2$ e $\kappa(e_i, e_j) = 0$ para os i, j restantes. Assim:

$$[\kappa]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, a forma de Cartan-Killing é degenerada em $\mathfrak{osc} \subset \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$.

Como vimos, a forma de Cartan-Killing pode ou não ser uma métrica em álgebras de Lie de dimensão finita.

Vamos provar que de fato esta é uma forma ad-invariante e portanto servirá como métrica ad-invariante onde não for degenerada.

Seja $V(\mathbb{F})$ espaço vetorial e $(V,[\ ,\ ])$ álgebra de Lie. Definimos o espaço de endomorfismos de V, $End(V)$ como

$$End(V) = \{T : V \to V \,|\, T \text{ é linear}\}$$

ou seja, o espaço gerado por todas as transformações lineares de V em V. De fato, este é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ com a composição usual de funções e multiplicação por escalar.
Definimos em $End(V)$ o colchete:

$$[T, S]' = T \circ S - S \circ T$$

onde $\circ$ denota a composição de funções. Temos que $End(V)$ é uma álgebra de Lie com esta operação. Notemos ainda que **se estamos em um espaço V de dimensão finita, cada endomorfismo é representado por uma matriz, e colchete de $End(V)$ coincide com o colchete usual do espaço de matrizes**.
Agora, provaremos as seguintes igualdades:

1. $ad_{[X,Y]}$=$[ad_X,\ ad_Y]$', isto é, a transformação linear $ad : X \to ad_X$ é um homomorfismo de V em $End(V)$, conhecida como **representação adjunta**.
   Temos que:
   $$ad_{[X,Y]}(W) = [[X, Y], W]$$
   $$[ad_X, ad_Y](W) = ad_X ad_Y(W) - ad_Y ad_X(W) = [X, [Y, W]] - [Y, [X, W]].$$
   Segue da identidade de Jacobi que:
   $$[[X, Y], W] + [[Y, W], X] + [[W, X], Y] = 0$$
   e daí:
   $$\begin{aligned} [[X, Y], W] &= -[[Y, W], X] - [[W, X], Y] \\ &= [X, [Y, W]] - [Y, [X, W]] \end{aligned}$$
   o que prova a igualdade.

2. $tr([X, Y]Z) = -tr(Y[X, Z])\ \forall\, X,\, Y \in End(V)$.
   Na verdade essa propriedade segue do que foi provado anteriormente no exemplo 2 da seção 4, sobre a forma $B(X, Y) = -tr(XY)$ ser ad-invariante. O sinal negativo não altera a propriedade, portanto $-B(X, Y) = tr(XY)$ também é ad-invariante.

Teorema 6. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. A sua forma de Cartan-Killing κ é ad-invariante.*

Demonstração. Sejam X, Y e $Z \in \mathfrak{g}$. Utilizando as duas igualdades mostradas acima, temos que:

$$\begin{aligned} \kappa(ad_X(Y), Z) &= tr(ad_{[X,Y]}ad_Z) \\ &= tr([ad_X, ad_Y]'ad_Z) \\ &= -tr(ad_Y[ad_X, ad_Z]') \\ &= -tr(ad_Y ad_{[X,Z]}) \\ &= -\kappa(Y, [X, Z]) \\ &= -\kappa(Y, ad_X(Z)) \end{aligned}.$$

Portanto:

$$\kappa(ad_X(Y), Z) + \kappa(Y, ad_X(Z)) = 0.$$

Logo, pelo que foi visto, a forma de Cartan-Killing é uma métrica ad-invariante em $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ e $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

A seguinte questão surge: Como saber quando a forma de Cartan-Killing é não-degenerada? Em busca dessa resposta, partiremos para um estudo breve nas próximas seções de como a estrutura da álgebra de Lie pode estar relacionada com a existência de uma métrica ad-invariante e o que se pode concluir sobre sua forma de Cartan-Killing sem realizar cálculos. Para isto, introduziremos as ideias de álgebras de Lie Nilpotentes, Solúveis, Simples e Semi-simples.

5 Álgebras de Lie Nilpotentes e Solúveis

5.1 Álgebras de Lie Nilpotentes

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. A *série central descendente* de $\mathfrak{g}$

$$\{\mathfrak{g}^k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

é definida indutivamente da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g}^1 & = & \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^{k+1} & = & [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k]. \end{array}$$

Notemos que para todo k vale que $g^k \subset g^{k-1}$.

Definição 11. *Dizemos que uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é nilpotente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^n = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{n-1}] = \{0\}$, isto é, se em algum momento a sua série central se anula.*

5.2 Exemplos

1. Toda álgebra de Lie abeliana é nilpotente, já que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$=0.

2. A subálgebra de Lie $\mathfrak{n}_5 \subset \mathfrak{gl}(5, \mathbb{R})$ dada por

$$\mathfrak{n}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{x_1}{2} & -\frac{x_2}{2} & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} | x_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1,2,3,4,5\} \right\}$$

é nilpotente. De fato, se considerarmos a base $\alpha = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$ onde

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os colchetes não-nulos são dados por:

$$[E_1, E_2] = E3 \qquad [E_1, E_4] = -E_2 \qquad [E_2, E_4] = -E_5.$$

Vamos calcular $\mathfrak{g}^1$=$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$:

$[aE_1+bE_2+cE_3+dE_4+E_5, xE_1+yE_2+zE_3+uE_4+tE_5] = (ay-bx)E_3+(dx-au)E_2+(dy-bu)E_5$

e portanto $\mathfrak{g}^1$=$Span\{E_2,E_3,E_5\}$. Calculando $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}^1]$:

$$[aE_1, bE_2+cE_3+dE_4+eE_5, xE_2+yE_3+zE_5] = axE_3$$

e então $\mathfrak{g}^2 = Span\{E_3\}$. Calculando $\mathfrak{g}^3 = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}^2]$:

$$[aE_1, bE_2+cE_3+dE_4+eE_5, rE_3] = 0.$$

Assim, a série central descendente de $\mathfrak{n}_5$ se anula para $k=5$, e portanto é uma álgebra de Lie nilpotente.

Caracterizaremos nos próximos capítulos a forma de Cartan-Killing em álgebras de Lie que sejam nilpotentes. Muitas vezes é mais conveniente utilizar o **Teorema de Engel** para saber se uma álgebra de Lie de dimensão finita é nilpotente. A demonstração do teorema pode ser encontrada no Capítulo 2 do livro *Álgebras de Lie* de San Martin, [5].

Teorema 7. *(Teorema de Engel) Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre* $\mathbb{F}$*. Então* $\mathfrak{g}$ *é nilpotente se, e só se para cada* $X\in\mathfrak{g}$ *temos que* ad_X *é uma transformação linear nilpotente.*

Como exemplo, consideremos a subálgebra de Lie $\mathfrak{n}_6\subset\mathfrak{gl}(5,\mathbb{R})$ dada por

$$\mathfrak{n}_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} | x_i\in\mathbb{R},\ i\in\{1,2,3,4,5,6\} \right\}.$$

Mostraremos que ela é nilpotente através do Teorema de Engel. Considere a base $\beta = \{e_1,e_2,e_3,e_3,e_5,e_6\}$ onde

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix}\ e_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix}\ e_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$e_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix}\ e_5 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix}\ e_6 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Os colchetes não-nulos da base são:

$$[e_1, e_4] = e_2 \qquad [e_1, e_6] = e_3 \qquad [e_4, e_6] = e_5.$$

Daí, se $X = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6$, os colchetes não-nulos de X com a base são:

$$[X, e_1] = -\alpha_4 e_2 \qquad [X, e_4] = \alpha_1 e_2 - \alpha_6 e_5 \qquad [X, e_6] = \alpha_1 e_3 + \alpha_4 e_5.$$

Portanto:

$$A = [ad_X]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_4 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ -\alpha_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_6 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tem polinômio característico $p(x) = x^6$, e portanto é uma matriz nilpotente já que $A^6 = \overline{0}$.
Isso mostra que ad_X é uma transformação linear nilpotente. Pela arbitrariedade de X, segue do Teorema de Engel que $\mathfrak{n}_6 \subset \mathfrak{gl}(5, \mathbb{R})$ é uma álgebra de Lie nilpotente.

5.3 Álgebras de Lie Solúveis

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. A *série derivada* de $\mathfrak{g}$ é uma família de subespaços

$$\{\mathfrak{g}^k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

definida indutivamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^0 &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^{k+1} &= [\mathfrak{g}^k, \mathfrak{g}^k]. \end{aligned}$$

Novamente temos que $g^k \subset g^{k-1}$.

Definição 12. *Dizemos que uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é solúvel se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{g}^n = [\mathfrak{g}^{n-1}, \mathfrak{g}^{n-1}] = \{0\}$, isto é, se em algum momento a sua série derivada se anula.*

Segue da definição que **toda álgebra de Lie nilpotente também é solúvel**. De fato, se a série central de $\mathfrak{g}$ se anula, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}] = 0$$

e portanto

$$[\mathfrak{g}^{k-1}, \mathfrak{g}^{k-1}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}] = 0$$

e a série derivada de $\mathfrak{g}$ também se anula.

5.4 Exemplos

1. Claramente toda álgebra de Lie abeliana é solúvel, já que $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = 0$.

2. Considere novamente a subálgebra de Lie $\mathfrak{osc} \subset \mathfrak{gl}(4,\mathbb{R})$ dada por:

$$\mathfrak{osc} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & -x_1 & 0 \\ x_3 & x_1 & 0 & 0 \\ -2x_4 & x_3 & -x_2 & 0 \end{pmatrix} | x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq 4 \right\}$$

com base $\alpha = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ onde:

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Temos que $\mathfrak{osc}$ é uma álgebra de Lie solúvel. Os colchetes não-nulos da base são dados por:

$$[e_1, e_2] = e_3\ ,\ [e_1, e_3] = -e_2\ ,\ [e_2, e_3] = e_4.$$

Calculando $\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$:

$$[ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4, xe_1 + ye_2 + ze_3 + we_4] = (cx - az)e_2 + (ay - bx)e_3 + (bz - cy)e_4.$$

Portanto $\mathfrak{g}^1 = Span\{e_2, e_3, e_4\}$. Calculando $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^1]$:

$$[ae_2 + be_3 + ce_4, xe_2 + ye_3 + ze_4] = (ay - bx)e_4.$$

Daí, $\mathfrak{g}^2 = Span\{e_4\}$. Calculando $\mathfrak{g}^3 = [\mathfrak{g}^2, \mathfrak{g}^2]$:

$$[ae_4, xe_4] = 0.$$

Logo, $\mathfrak{g}^3 = 0$, e portanto a álgebra de Lie é solúvel. Como foi visto anteriormente, sua forma de Cartan-Killing é degenerada.

3. A subálgebra de Lie $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{gl}(4,\mathbb{R})$ dada por:

$$\mathfrak{b} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & -x_1 & 0 \\ -2x_4 & -x_3 & x_2 & 0 \end{pmatrix} | x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq 4 \right\}$$

é uma álgebra de Lie solúvel. Uma verificação análoga ao item anterior mostra que $\mathfrak{g}^3 = [\mathfrak{g}^2, \mathfrak{g}^2] = \overline{0}$.

Vimos na seção anterior que a forma de Cartan-Killing da álgebra de Lie $\mathfrak{osc} \subset \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ é degenerada. Veremos agora que isto não é uma coincidência, mas sim uma consequência da álgebra de Lie ser solúvel. O teorema é conhecido como **Critério de Cartan**, e sua demonstração completa pode ser conferida no Capítulo 3 do livro *Álgebras de Lie* de San Martin, [5].

Lema 1. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Então $\mathfrak{g}$ é solúvel se, e só se $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é nilpotente.*

Lema 2. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Se sua forma de Cartan-Killing κ é identicamente nula, então g é solúvel.*

Teorema 8. *(Critério de Cartan) Seja $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ com $char(\mathbb{F}) \neq 0$ e $\kappa(X, Y)$ sua forma de Cartan-Killing. Então $\mathfrak{g}$ é solúvel se, e só se $\kappa(X, Y) = 0$ para todo X em $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e Y em $\mathfrak{g}$.*

Suponhamos $\mathfrak{g}$ solúvel. O Teorema de Lie (ver Capítulo 2, *Álgebras de Lie*, [5]) afirma que toda álgebra de Lie solúvel sobre um corpo algebricamente fechado de transformações lineares é uma subálgebra de matrizes triangulares superiores, isto é, existe uma base de $End(\mathfrak{g})$ na qual todo $ad_Y \in End(\mathfrak{g})$ é uma matriz triangular superior. Assim, se $X \in \mathfrak{g}'$, ad_X possui zeros na diagonal. Logo, $ad_Y ad_X$ possui zeros na diagonal, e então tem traço nulo. Logo, $\kappa(X, Y) = tr(ad_X \circ ad_Y) = 0$.
Se $\mathbb{F}$ não é algebricamente fechado, como por exemplo no caso das álgebras de Lie sobre $\mathbb{R}$, podemos considerar sua **complexificação** $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (ver *Álgebras de Lie* [5], capítulo 1 e *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces* [2] capítulo 3.6). Temos $\mathfrak{g}$ solúvel se, e só se $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ é solúvel, além de que $\kappa(X, Y) = 2Re(\kappa_{\mathbb{C}}(X, Y))$. Aplicamos o resultado para $\kappa_{\mathbb{C}}$ e portanto devemos ter $\kappa(X, Y) = 0$.
Quanto à recíproca, se $\kappa(X, Y) = 0$ para X em $\mathfrak{g}'$ e Y em $\mathfrak{g}$, em particular κ', forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}'$, é identicamente nula. Pelo Lema 2, $\mathfrak{g}'$ é solúvel. Então, $\mathfrak{g}$ é solúvel.

Corolário 3. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie solúvel de dimensão finita. Então, sua forma de Cartan-Killing é degenerada.*

Segue imediatamente do teorema que **se $\mathfrak{g}$ é solúvel, sua forma de Cartan-Killing é degenerada, e portanto não servirá como métrica ad-invariante. Como toda álgebra de Lie nilpotente também é solúvel, o mesmo ocorre nestas álgebras.**

No entanto, como veremos a seguir, isto não significa que álgebras de Lie nilpotentes/solúveis não possuem métricas ad-invariantes.

6 Construção de métricas ad-invariantes

Veremos a seguir como podemos procurar uma métrica ad-invariante em um espaço de dimensão finita. Lembremos que uma métrica $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ é dita ad-invariante se

$$B(ad_X(Y), Z) + B(Y, ad_X(Z)) = 0 \qquad \forall X, Y, Z \in V.$$

Para que B tenha esta propriedade, é necessário e suficiente que ela se verifique sobre a base de V. De fato, seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base de V, e $X = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, $Y = \sum_{j=1}^{n} b_j e_j$ e $Z = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$:

$$B([X, Y], Z) = B([\sum_i a_i e_i, \sum_j b_j e_j], \sum_k c_k e_k) = \sum_{i,j,k} a_i b_j c_k B([e_i, e_j], e_k)$$

$$B(Y, [X, Z]) = B(\sum_j b_j e_j, [\sum_i a_i e_i, \sum_k c_k e_k]) = \sum_{i,j,k} a_i b_j c_k B(e_j, [e_i, e_k])$$

e então

$$B(ad_X(Y), Z) + B(Y, ad_X(Z)) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i,j,k} a_i b_j c_k (B([e_i, e_j], e_k) + B(e_j, [e_i, e_k])) = 0$$

$$\sum_{i,j,k} a_i b_j c_k (B([e_i, e_j], e_k) + B(e_j, [e_i, e_k])) = 0 \Longleftrightarrow B([e_i, e_j], e_k) + B(e_j, [e_i, e_k]) = 0 \quad \forall\, i, j, k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Nos basearemos neste fato nos exemplos a seguir.

1. Vimos que a subálgebra de Lie $\mathfrak{n}_5 \subset \mathfrak{gl}(5, \mathbb{R})$ dada por

$$\mathfrak{n}_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{x_1}{2} & -\frac{x_2}{2} & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} | x_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \right\}$$

é nilpotente. Considerando a base $\alpha = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$ onde

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

temos que os colchetes não-nulos da base são dados por:

$$[E_1, E_2] = E_3 \qquad [E_1, E_4] = -E_2 \qquad [E_2, E_4] = -E_5.$$

Suponha B uma forma bilinear simétrica nesta álgebra de Lie que seja ad-invariante. Nosso objetivo será construir $[B]_\alpha^\alpha$. Em particular, ela é ad-invariante sobre a base. Portanto:

$$B([E_4, E_1], E_1) + B(E_1, [E_4, E_1]) = 0 \iff 2B([E_4, E_1], E_1) = 0 \iff B(E_2, E_1) = 0.$$

Então, $B_{21} = B_{12} = 0$.

$$B([E_1, E_2], E_2) + B(E_2, [E_1, E_2]) = 0 \iff 2B([E_1, E_2], E_2) = 0 \iff B(E_3, E_1) = 0.$$

Então, $B_{23} = B_{32} = 0$.

$$B([E_1, E_2], E_3) + B(E_2, [E_1, E_3]) = 0 \iff B([E_1, E_2], E_3) = 0 \iff B(E_3, E_3) = 0.$$

Então, $B_{33} = 0$.

$$B([E_1, E_2], E_5) + B(E_2, [E_1, E_5]) = 0 \iff B([E_1, E_2], E_5) = 0 \iff B(E_3, E_5) = 0.$$

Então, $B_{35} = B_{53} = 0$.

$$B([E_1, E_4], E_5) + B(E_4, [E_1, E_5]) = 0 \iff B([E_1, E_2], E_5) = 0 \iff B(E_2, E_5) = 0.$$

Então, $B_{25} = B_{52} = 0$.

$$B([E_2, E_4], E_5) + B(E_4, [E_2, E_5]) = 0 \iff B([E_2, E_4], E_5) = 0 \iff B(E_5, E_5) = 0.$$

Então, $B_{55} = 0$.

$$B([E_1, E_2], E_4) + B(E_2, [E_1, E_4]) = 0 \iff B(E_3, E_4) = B(E_2, E_2)$$

$$B([E_2, E_4], E_1) + B(E_4, [E_2, E_1]) = 0 \iff -B(E_5, E_1) = B(E_4, E_3).$$

Assim, $B_{15} = B_{51} = -B_{34} = -B_{43} = -B_{22}$.

Notemos que as contas feitas não são aleatórias. Como os colchetes não-nulos resultam em E_3, E_2 e em E_5, podemos obter informações sobre as linhas e colunas 2, 3 e 5 da matriz de B. Por exemplo, para descobrir B_{12}, como $[E_1, E_4] = -E_2$, trabalhamos com $B([E_4, E_1], E_1) + B(E_1, [E_4, E_1]) = 0$. Da mesma forma, não conseguimos obter informação sobre B_{11}, pois nenhum colchete da base resulta em E_1.

Assim, temos:

$$[B]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & d & b \\ 0 & -b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b & 0 \\ d & 0 & -b & c & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde a, b, c e $d \in \mathbb{R}$. Como $det([B]_\alpha^\alpha) = -b^5$, a forma será não-degenerada quando $b \neq 0$. Obtivemos que as métricas ad-invariantes em $\mathfrak{n}_5 \subset \mathfrak{gl}(5, \mathbb{R})$ são da forma acima, para a, b, c reais quaisquer e b real não-nulo.

2. A subálgebra de Lie $\mathfrak{osc} \subset \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$

$$\mathfrak{osc} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & -x_1 & 0 \\ x_3 & x_1 & 0 & 0 \\ -2x_4 & x_3 & -x_2 & 0 \end{pmatrix} | x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq 4 \right\}$$

é solúvel, como visto anteriormente. Vamos realizar os cálculos considerando a base $\alpha = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ onde:

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Os colchetes não-nulos da base são dados por:

$$[e_1, e_2] = e_3 \qquad [e_1, e_3] = -e_2 \qquad [e_2, e_3] = e_4.$$

Novamente, suponhamos B uma forma bilinear simétrica nesta álgebra de Lie que seja ad-invariante. Vamos construir $[B]_\alpha^\alpha$:

$$B([e_1, e_2], e_1) + B(e_2, [e_1, e_1]) = 0 \Longleftrightarrow B(e_3, e_1) = 0$$

e então $B_{13} = B_{31} = 0$.

$$B([e_1, e_2], e_2) + B(e_2, [e_1, e_2]) = 0 \Longleftrightarrow 2B([e_1, e_2], e_2) = 0 \Longleftrightarrow B(e_3, e_2) = 0$$

e então $B_{32} = B_{23}$.

$$B([e_1, e_2], e_4) + B(e_2, [e_1, e_4]) = 0 \Longleftrightarrow B(e_3, e_4) = 0$$

e então $B_{34} = B_{43} = 0$.

$$B([e_1, e_3], e_1) + B(e_3, [e_1, e_1]) = 0 \Longleftrightarrow B(e_2, e_1) = 0$$

e então $B_{12} = B_{21} = 0$.

$$B([e_1, e_3], e_4) + B(e_3, [e_1, e_4]) = 0 \Longleftrightarrow B(e_2, e_4) = 0$$

e então $B_{24} = B_{42} = 0$.

$$B([e_2, e_3], e_4) + B(e_3, [e_2, e_4]) = 0 \Longleftrightarrow B(e_4, e_4) = 0$$

e então $B_{44} = 0$.

$$B([e_1, e_2], e_3) + B(e_2, [e_1, e_3]) = 0 \Longleftrightarrow B(e_3, e_3) - B(e_2, e_2) = 0$$

$$B([e_2, e_3], e_1) + B(e_3, [e_2, e_1]) = 0 \Longleftrightarrow B(e_4, e_1) - B(e_3, e_3) = 0$$

e então $B_{22} = B_{33} = B_{14} = B_{41}$.
Estas são as únicas informações que temos sobre a forma matricial de B a partir dos colchetes. Então:

$$[B]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Temos que $det([B]_\alpha^\alpha) = -b^4$, e portanto ela será não-degenerada quando $b \neq 0$.
Assim, as métricas ad-invariantes em $\mathfrak{osc} \subset \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ são da forma acima, com a real qualquer e $b \neq 0$.

3. Também vimos que a subálgebra de Lie $\mathfrak{n}_6 \subset \mathfrak{gl}(5, \mathbb{R})$ é nilpotente.

$$\mathfrak{n}_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 & 0 & x_5 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} | x_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \right\}$$

Considerando a base $\beta = \{E_1, E_2, E_3, E_3, E_5, E_6\}$ onde

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e os colchetes não-nulos da base

$$[E_1, E_4] = E_2 \qquad [E_1, E_6] = E_3 \qquad [E_4, E_6] = E_5.$$

Suponha B uma forma bilinear simétrica nesta álgebra de Lie que seja ad-invariante. Procedendo da mesma forma que nos itens anteriores, podemos obter que:

$$[B]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 & 0 \\ b & 0 & -c & e & 0 & g \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & c & 0 & g & 0 & f \end{pmatrix}$$

onde a, b, c, d, e, f e $g \in \mathbb{R}$. Temos $det([B]_\beta^\beta) = -c^6$ e então B será não-degenerada quando $c \neq 0$.

Portanto, as métricas ad-invariantes em $\mathfrak{n}_6 \subset \mathfrak{gl}(5, \mathbb{R})$ são da forma acima, com a, b, d, e, f, g reais quaisquer e $c \neq 0$.

4. Temos que a subálgebra de Lie $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ é solúvel:

$$\mathfrak{b} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & -x_1 & 0 \\ -2x_4 & -x_3 & x_2 & 0 \end{pmatrix} | x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq 4 \right\}$$

Podemos considerar a base $\alpha = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ onde:

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Os colchetes não-nulos desta base são dados por:

$$[e_1, e_2] = e_2 \qquad [e_1, e_3] = -e_3 \qquad [e_2, e_3] = e_4.$$

Se B é uma forma bilinear simétrica ad-invariante em $\mathfrak{b}$, podemos proceder como nos itens anteriores e obter

$$[B]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Como $det([B]^{\alpha}_{\alpha}) = -b^4$, B é não-degenerada se $b \neq 0$.
Assim, as métricas ad-invariantes em $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ são da forma acima, com $a \in \mathbb{R}$ qualquer e $b \neq 0$.

5. Se considerarmos a subálgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de $M_2(\mathbb{R})$

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | \alpha,\, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

pode-se verificar facilmente que ela é solúvel. Considerando a base α formada por

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

o único colchete não-nulo é $[E_1, E_2] = E_2$. Se B é uma forma bilinear simétrica ad-invariante em $\mathfrak{g}$:

$$B([E_1, E_2], E_1) = -B(E_2, [E_1, E_1]) \Longrightarrow B(E_2, E_1) = 0$$

e então $B_{21} = B_{12} = 0$. Além disso:

$$B([E_1, E_2], E_2) = -B(E_2, [E_1, E_2]) \Longrightarrow B(E_2, E_2) = -B(E_2, E_2)$$

e então $B_{22} = 0$. Portanto:

$$[B]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde $a \in \mathbb{R}$. Claramente, $det([B]^{\alpha}_{\alpha}) = 0$ para qualquer valor de a.
Concluímos que $\mathfrak{g}$ **não possui uma métrica ad-invariante.**

Então, **uma álgebra de Lie solúvel/nilpotente de dimensão finita pode ou não ter uma métrica ad-invariante**, apesar de sua forma de Cartan-Killing ser sempre degenerada. Podemos encontrá-las através de cálculos, quando existirem.

7 Álgebras de Lie Simples e Semi-Simples

Nesta seção, buscaremos um critério para saber quando a forma de Cartan-Killing é não-degenerada, e portanto quando serve como métrica ad-invariante. Isto foi observado em $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ e $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, e veremos o que elas têm em comum em termos de estrutura.

Relembremos a definição de ideal em uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$:

Definição 13. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Um subespaço $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é um* ***ideal*** *em $\mathfrak{g}$ se $\forall X \in \mathfrak{h}$ e $Y \in \mathfrak{g}$ temos*

$$[X, Y] \in \mathfrak{h}$$

isto é:

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$$

Fica claro da definição que todo ideal é uma subálgebra de Lie.

Definição 14. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ com dim$(\mathfrak{g}) \neq 1$ é dita* ***simples*** *se seus únicos ideais são 0 e $\mathfrak{g}$. Isto é, as álgebras simples são aquelas que não possuem ideais além dos triviais.*

Definição 15. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Definimos o* ***radical*** *de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$, como o ideal solúvel máximo de $\mathfrak{g}$. Isto é, o ideal solúvel que contém todos os outros ideais solúveis.*

De fato, é necessário provar a existência do radical. Isto segue do fato que a soma de ideais solúveis é um ideal solúvel. Em dimensão finita, fica claro que há um ideal solúvel $\mathfrak{r}$ de dimensão máxima, e portanto ele deve ser igual a qualquer soma $\mathfrak{r} + \mathfrak{h}$, mostrando que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}$. A demonstração com detalhes pode ser consultada na referência [5], Capítulo 1.8.

Definição 16. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita* ***semi-simples*** *se não possui ideias solúveis não-nulos, isto é:*

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$$

Segue da definição que **toda álgebra simples também é semi-simples**. Como nosso propósito é encontrar métricas ad-invariantes, vamos relacionar a existência de tais métricas com o fato da álgebra de Lie ser semi-simples.

7.1 Exemplos

1. A álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$ é simples. Consideramos a base $\beta = \{E_1, E_2, E_3\}$, onde:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lembremos que os colchetes não-nulos são:

$$[E_1, E_2] = E_3, \quad [E_1, E_3] = -E_2, \quad [E_2, E_3] = E_1.$$

Seja $\mathfrak{h}$ um ideal não-nulo de $\mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$. Seja $Z = aE_1 + bE_2 + cE_3 \in \mathfrak{h}$. Temos em $\mathfrak{h}$:

$$[E_1, Z] = bE_3 - cE_2 \ , \ [E_2, Z] = -aE_3 + cE_1 \ , \ [E_3, Z] = aE_2 - bE_1.$$

Suponhamos que $\mathfrak{h}$ tenha dimensão 1, e então estes vetores são linearmente dependentes. Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$[E_1, Z] = \lambda[E_2, Z] \Longleftrightarrow bE_3 - cE_2 = -\lambda aE_3 + \lambda cE_1 \Longleftrightarrow (b - \lambda a)E_3 = \lambda cE_1 + cE_2$$

e como E_1, E_2 e E_3 são L.I, segue que $c = 0$. Obtemos de $[E_1, Z]$ que bE_3 pertence a h. Assim, existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que

$$Z = aE_1 + bE_2 = \gamma[E_1, Z] = \gamma bE_3.$$

Novamente, como E_1, E_2 e E_3 são L.I, devemos ter $a = b = 0$, o que contradiz Z ser não -nulo. Ou seja, **não temos ideais de dimensão 1.**

Suponhamos agora que $\mathfrak{h}$ seja de dimensão 2.

Caso $c = 0$: De $[E_1, Z] = bE_3$ e $[E_2, Z] = -aE_3$ segue que $E_3 \in \mathfrak{h}$. Então $Z = aE_1 + bE_2$ e E_3 formam uma base de $\mathfrak{h}$, e portanto existem λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$[E_3, Z] = \lambda_1 E_3 + \lambda_2 Z \Longleftrightarrow (-b - \lambda_2 a)E_1 + (a - \lambda_2 b)E_2 - \lambda_1 E_3 = 0.$$

Obtemos que:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ -\lambda_2 a & = & b \\ \lambda_2 b & = & a \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -(\lambda_2)^2 a & = & a \\ -(\lambda_2)^2 b & = & b \end{array} \right. .$$

Como b e a não podem ser simultaneamente nulos, segue que $\lambda_2 \neq 0$. Se $b = 0$, segue da terceira equação que $a = 0$, contrariando Z ser não nulo. Da mesma forma, $a = 0$ implica $b = 0$, o que novamente contraria Z ser não-nulo.

Caso $c \neq 0$: Vimos anteriormente que se $[E_1, Z]$ e $[E_2, Z]$ são linearmente dependentes, obtemos que $c = 0$. Então, podemos considerar que eles formam uma base para $\mathfrak{h}$. Assim, existem λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que $Z = \lambda_1[E_1, Z] + \lambda_2[E_2, Z]$, e obtemos:

$$(a - \lambda_2 c)E_1 + (b + \lambda_1 c)E_2 + (c - \lambda_1 b + \lambda_2 a)E_3 = 0.$$

Pela independência de E_1, E_2 e E_3, segue que:

$$\begin{cases} a - \lambda_2 c & = & 0 \\ b + \lambda_1 c & = & 0 \\ c - \lambda_1 b + \lambda_2 a & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = & \dfrac{-b}{c} \\ \lambda_2 & = & \dfrac{a}{c} \end{cases}$$

Mas da terceira equação obtemos que:

$$c - \lambda_1 b + \lambda_2 a = 0 \Longleftrightarrow c + \frac{b^2}{c} + \frac{a^2}{c} = 0 \Longleftrightarrow a^2 + b^2 = -c^2$$

o que é absurdo, visto que $a^2 + b^2$ é um número não negativo e $c \neq 0$. Portanto, **não temos ideais de dimensão 2**.
Consequentemente, como nossa álgebra tem dimensão 3, $\mathfrak{so}(3, \mathbb{R})$ não possui ideais não-triviais, e portanto é uma álgebra de Lie simples.

2. A álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ é simples. Considere a base $\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$ onde

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

com os colchetes não-nulos:

$$[e_1, e_2] = 2e_2, \quad [e_1, e_3] = -2e_3, \quad [e_2, e_3] = e_1.$$

Seja $\mathfrak{h}$ ideal não-nulo, e $Z = ae_1 + be_2 + ce_3 \in \mathfrak{h}$ não-nulo. Temos que:

$$[e_1, Z] = -2be_1 + ce_2 \quad , \quad [e_1, [e_1, Z]] = -2ce_1.$$

Notemos que, independente de a, b ou c serem nulos, como não podem ser todos iguais a 0, segue que $e_1 \in \mathfrak{h}$. Considerando que

$$[e_1, e_3] = -e_2$$

obtemos que e_2 está em $\mathfrak{h}$. Como

$$[e_2, e_3] = -2e_3$$

segue que e_3 está em $\mathfrak{h}$. Portanto, $\mathfrak{h}$=$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Como nosso propósito é encontrar métricas ad-invariantes, vamos relacionar a existência de tais métricas com o fato da álgebra de Lie ser semi-simples.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples de dimensão finita, e κ sua forma de Cartan-Killing. Definimos

$$S = \{x \in \mathfrak{g} \,|\, \kappa(x, y) = 0\,,\ \forall\, y \in \mathfrak{g}\}$$

Fica claro que κ ser não-degenerada equivale a $S = 0$. Temos que S **é um ideal de** $\mathfrak{g}$. De fato, sejam $x \in S$ e y, $z \in \mathfrak{g}$. Então, como esta forma é ad-invariante e bilinear:

$$\begin{aligned} \kappa([x, y], z) &= \kappa(-[y, x], z) \\ &= -\kappa([y, x], z) \\ &= \kappa(x, [y, z]). \end{aligned}$$

Por outro lado, $\kappa(x, [y, z]) = 0$ já que $x \in S$. Portanto, $\kappa([x, y], z) = 0$, e pela arbitrariedade de z temos $[x, y] \in S$.
Mais do que isso, S é um ideal solúvel. De fato, segue da definição que se $x \in S$ e $y \in [S, S]$, então $\kappa(x, y) = 0$. Como a forma de Cartan-Killing de S é a restrição de κ em S, o **Critério de Cartan** apresentado na seção de Álgebras de Lie Solúveis implica que S é solúvel. Portanto, temos $S \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. Mas como $\mathfrak{g}$ é semi-simples, $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$ e então $S = 0$. Consequentemente $\kappa(x, y)$ é não-degenerada.
Suponhamos agora que $\mathfrak{g}$ não seja semi-simples: ela admite um ideal abeliano não-trivial I. De fato, como existe um ideal J solúvel, podemos tomar I como sendo o último termo não-nulo da série derivada de J. Tomando $X \in I$, para todo Y em $\mathfrak{g}$ teríamos a a imagem de $ad_Y \circ ad_X$ em I, pois é ideal. Esta transformação linear restrita a I é identicamente nula, e seu traço coincide com o de $ad_Y \circ ad_X$, mostrando que κ é degenerada. Estas ideias nos levam ao teorema abaixo, que pode ser encontrado na seção 5 de [4] e também no Capítulo 3 da referência [5].

Teorema 9. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é semi-simples se, e só se sua forma de Cartan-Killing $\kappa(X, Y)$ é não-degenerada.*

Ou seja, se $\mathfrak{g}$ **de dimensão finita é semi-simples, então sua forma de Cartan-Killing é não-degenerada, e portanto servirá como métrica ad-invariante.** Existe classificação das álgebras de Lie simples e semi-simples de dimensão finita, a qual é apresentada nos capítulos 6, 7 e 8 de [5]. Vale mencionar que dentre estas estão espaços de matrizes clássicos, como:

-
$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \,|\, tr(X) = 0\}$$

- Quando $n \neq 2$ e $n \neq 4$:
$$\mathfrak{so}_n(\mathbb{C}) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \,|\, X^* = -X\}$$

-
$$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}) = \left\{ X \in M_{2n}(\mathbb{C}) \,|\, J_n X + X^T J_n = 0, \text{ onde } J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

No geral, se a álgebra de Lie não é semi-simples, não se sabe quando ela possui uma métrica ad-invariante.

8 O método da extensão-dupla

Vimos dois critérios interessantes que relacionam a existência de métricas ad-invariantes com a estrutura da álgebra de Lie. Agora, partindo de uma álgebra de Lie n-dimensional $\mathfrak{g}$ dotada de uma métrica ad-invariante B, veremos como obter uma nova álgebra de Lie de dimensão $n+2$ que também possui uma métrica ad-invariante. Este método é conhecido como processo de extensão-dupla, introduzido por G. Favre e L. J. Santharoubane (ver [1]). Primeiro, veremos algumas definições necessárias.

Definição 17. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma **derivação** em $\mathfrak{g}$ é uma transformação linear $D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ tal que para quaisquer X e Y em g vale:*

$$D([X,Y]) = [DX,Y] + [X,DY].$$

Por exemplo, para todo X numa álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ temos que ad_X é uma derivação. De fato, utilizando a identidade de Jacobi segue que

$$[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]]$$

e isto equivale a

$$ad_X([Y,Z]) = [ad_X(Y),Z] + [Y, ad_X(Z)].$$

O conjunto de todas as derivações de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ será denotado por $Der\,\mathfrak{g}$, e este é um espaço vetorial com as operações usuais de funções. Ainda, $Der\,\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie com o colchete dado por $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$. Em particular, o interesse está nas derivações D em $Der\,\mathfrak{g}$ tais que $B(DX,Y) = -B(X,DY)$, onde B é uma métrica ad-invariante em $\mathfrak{g}$. Estas são chamadas de **derivações antissimétricas**, e como exemplo também temos ad_X, para todo X em $\mathfrak{g}$.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre um corpo $\mathbb{F}$, dotada de uma métrica ad-invariante B e uma derivação antissimétrica D. Considere $\mathbb{F}$ como espaço vetorial unidimensional. Podemos estender $\mathfrak{g}$ adicionando duas componentes de $\mathbb{F}$, obtendo o espaço vetorial $\overline{\mathfrak{g}}$ dado por

$$\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{F}c \oplus \mathbb{F}d$$

onde c e d são vetores de quaisquer natureza. Obtemos neste espaço uma estrutura de álgebra de Lie da seguinte forma:

Teorema 10. *O espaço vetorial $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{F}c \oplus \mathbb{F}d$ munido do colchete dado por*

$$[X + \alpha_1 c + \alpha_2 d, Y + \beta_1 c + \beta_2 d]' = [X,Y] + \alpha_2 DY - \beta_2 DX + B(DX,Y)c$$

é uma álgebra de Lie.

Note que do colchete adotado resulta que $[\mathbb{F}c, u] = 0$, para qualquer vetor $u \in \overline{\mathfrak{g}}$. Isto é, $\mathbb{F}c$ está no **centro $\mathfrak{Z}(\overline{\mathfrak{g}})$ de $\overline{\mathfrak{g}}$**, onde $\mathfrak{Z}(\overline{\mathfrak{g}}) = \{v \in \overline{\mathfrak{g}} \mid [v,u]' = 0, \ \ \forall\, u \in \overline{\mathfrak{g}}\}$.

Também podemos estender a métrica ad-invariante B de $\mathfrak{g}$ para a álgebra de Lie $\overline{\mathfrak{g}}$ ao definirmos:

$$B'(c,d) = 1, \qquad B'(c,c) = B'(d,d) = B'(c,X) = B'(d,X) = 0.$$

Portanto:

$$B'(X + \alpha_1 c + \alpha_2 d, Y + \beta_1 c + \beta_2 d) = B(X,Y) + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1.$$

Teorema 11. *A aplicação $B'(X + \alpha_1 c + \alpha_2 d, Y + \beta_1 c + \beta_2 d) = B(X,Y) + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1$ é uma métrica ad-invariante em $\overline{\mathfrak{g}}$.*

Demonstração.

1. **não-degenerada:** Como B é não-degenerada, dado $X \in \mathfrak{g}$, existe $\overline{X}$ tal que $B(X,\overline{X}) \neq 0$. Então, dado $X + \alpha_1 c + \alpha_2 d \in \overline{\mathfrak{g}}$, $B'(X + \alpha_1 c + \alpha_2 d, \overline{X}) = B(X,\overline{X}) \neq 0$.

2. **ad-invariante:** Sejam $u = X + \alpha_1 c + \alpha_2 d$, $v = Y + \beta_1 c + \beta_2 d$ e $w = Z + \gamma_1 c + \gamma_2 d$ em $\overline{\mathfrak{g}}$. Então:

$$B'([u,v]',w) = B([X,Y],Z) + \alpha_2 B(DY,Z) - \beta_2 B(DX,Z) + \gamma_2 B(DX,Y)$$

$$B'(v,[u,w]') = B(Y,[X,Z]) + \alpha_2 B(Y,DZ) + \beta_2 B(DX,Z) - \gamma_2 B(Y,DX).$$

Temos que B é ad-invariante e D é antissimétrica com respeito a B, isto é, vale $B(DX,Y) = -B(X,DY)$ para quaisquer vetores X e Y em $\mathfrak{g}$. Portanto:

$$B'(v,[u,w]') = -B([X,Y],Z]) - \alpha_2 B(DY,Z) + \beta_2 B(DX,Z) - \gamma_2 B(Y,DX)$$

o que mostra $B'([u,v]',w) = -B'(v,[u,w]')$.

É importante notar que a extensão depende da métrica e derivação adotadas em $\mathfrak{g}$. **No geral, duas extensões da mesma álgebra de Lie obtidas a partir de métricas/derivações diferentes não são isomorfas.** Veremos este fato nos exemplos a seguir.

8.1 Exemplos

1. Seja $\mathfrak{g} \subset M_2(\mathbb{R})$ a álgebra de Lie abeliana dada por

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} | a,\, b \in \mathbb{R} \right\}$$

com base $\alpha = \{E_1, E_2\}$ onde

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que por $\mathfrak{g}$ ser abeliana, qualquer forma bilinear simétrica não-degenerada em $\mathfrak{g}$ será ad-invariante.

Considere em $\mathfrak{g}$ a métrica ad-invariante B tal que

$$B(E_1,E_1) = B(E_2,E_2) = 1 \qquad B(E_1,E_2) = 0.$$

Seja D uma derivação antissimétrica em $\mathfrak{g}$ com respeito a B. Então:

$$[D]^\alpha_\alpha = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} \Longrightarrow D(E_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad D(E_2) = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

Como D é antissimétrica:

$$B(DE_1, E_2) = -B(E_1, DE_2) \Longleftrightarrow \lambda_3 B(E_2, E_2) = -\lambda_2 B(E_1, E_1) \Longleftrightarrow \lambda_3 = -\lambda_2.$$

Por outro lado, como B é produto interno:

$$B(X, DY) = -B(DX, Y) = B(X, D^T Y) \Longleftrightarrow B(X, (D + D^T)Y) = 0.$$

Como a última igualdade deve valer para quaisquer X e Y em $\mathfrak{g}$ e B é produto interno, devemos ter $D + D^T = 0$. Daí:

$$[D]^\alpha_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Vamos considerar a derivação D tal que $\lambda = 1$.

Sejam c e d vetores quaisquer. Consideremos a extensão de $\mathfrak{g}$ com respeito a D e a B, $\overline{\mathfrak{g}}_1 = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}c \oplus \mathbb{R}d$. Se $X = xE_1 + yE_2$ e $Y = uE_1 + vE_2$ em $\mathfrak{g}$, o colchete em $\overline{\mathfrak{g}}$ é dado por

$$\begin{aligned} [X + \alpha_1 c + \alpha_2 d, Y + \beta_1 c + \beta_2 d]_1 &= [X, Y] + \alpha_2 DY - \beta_2 DX + cB(DX, Y) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_2 v - \beta_2 y \\ -\alpha_2 u + \beta_2 x \\ yu - xv \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

onde o colchete está representado como vetor em relação à base $\{E_1, E_2, c, d\}$ de $\overline{\mathfrak{g}}_1$.
A métrica ad-invariante B_1 de $\overline{\mathfrak{g}}_1$ é dada por

$$\begin{aligned} B_1(X + \alpha_1 c + \alpha_2 d, Y + \beta_1 c + \beta_2 d) &= B(X, Y) + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 \\ &= xu + yv + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1. \end{aligned}$$

Vamos calcular os coeficientes de estrutura de $\overline{\mathfrak{g}}_1$. Os colchetes não-nulos são:

$$[E_1, E_2]_1 = cB(DE_1, E_2) = -c$$

$$[E_1, d]_1 = \begin{pmatrix} 0.0 - 1.0 \\ -0.1 + 1.1 \\ 0.0 - 1.0 \\ 0 \end{pmatrix} = E_2$$

$$[E_2, d]_1 = \begin{pmatrix} 0.0 - 1.1 \\ -0.0 + 1.0 \\ 1.0 - 0.0 \\ 0 \end{pmatrix} = -E_1.$$

Se considerarmos uma nova base ordenada de $\overline{\mathfrak{g}}_1$ $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, onde $e_1 = d$, $e_2 = E_2$, $e_3 = E_1$ e $e_4 = c$, temos que os colchetes não-nulos são:

$$[e_1, e_2]_1 = e_3 \quad [e_1, e_3]_1 = -e_2 \quad [e_2, e_3]_1 = e_4.$$

Vimos no exemplo 3 da seção 4 que a subálgebra de Lie solúvel $\mathfrak{osc} \subset \mathfrak{gl}(4, \mathbb{R})$ dada por:

$$\mathfrak{osc} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & -x_1 & 0 \\ x_3 & x_1 & 0 & 0 \\ -2x_4 & x_3 & -x_2 & 0 \end{pmatrix} | x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq 4 \right\}$$

com base $\alpha = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4\}$ onde:

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

tem colchetes não-nulos dados por:

$$[\epsilon_1, \epsilon_2] = \epsilon_3 \ , [\epsilon_1, \epsilon_3] = -\epsilon_2 \ , [\epsilon_2, \epsilon_3] = \epsilon_4$$

ou seja, $\overline{\mathfrak{g}}_1$ **e** $\mathfrak{osc}$ **possuem os mesmos coeficientes de estrutura, e portanto são álgebras de Lie isomorfas.** Basta definir o isomorfismo $\Psi : \mathfrak{osc} \longrightarrow \overline{\mathfrak{g}}_1$ dado por:

$$\Psi(\epsilon_i) = e_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Também vimos na seção de Álgebras de Lie solúveis que as métricas ad-invariantes em $\mathfrak{osc}$ são da forma:

$$[B_{\mathfrak{osc}}]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

com $b \neq 0$.

Se considerarmos

$$[B_{\mathfrak{osc}}]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

temos que vale

$$B_{\mathfrak{osc}}(\epsilon_i, \epsilon_j) = B_1(\Psi(\epsilon_i), \Psi(\epsilon_j)) \qquad \forall i,\ j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Neste caso, como também são isomorfas, dizemos que $(\mathfrak{osc}, B_{\mathfrak{osc}})$ e $(\bar{\mathfrak{g}}_1, B_1)$ são **isométricas**, e que Ψ é **isometria de álgebras de Lie.**

2. Na mesma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ anterior com a mesma base, considere agora a métrica ad-invariante B dada por

$$B(E_1, E_1) = 1 = -B(E_2, E_2), \qquad B(E_1, E_2) = 0$$

Vamos encontrar uma derivação D antissimétrica com respeito a B :

$$D(E_1) = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2$$

e

$$D(E_2) = \alpha_3 E_1 + \alpha_4 E_2.$$

Como D deve ser antissimétrica:

$$B(DE_1, E_2) = -B(E_1, DE_2) \Longleftrightarrow \alpha_2 = \alpha_3$$

$$B(DE_1, E_1) = -B(E_1, DE_1) \Longleftrightarrow \alpha_1 = 0$$

$$B(DE_2, E_2) = -B(E_2, DE_2) \Longleftrightarrow \alpha_2 = 0$$

e portanto:

$$[D]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Tomemos D com $\lambda = 1$.

Sejam c e d vetores quaisquer. Consideremos a extensão de $\mathfrak{g}$, $\bar{\mathfrak{g}}_2 = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}c \oplus \mathbb{R}d$ com respeito a derivação D. Se $X = xE_1 + yE_2$ e $Y = uE_1 + vE_2$ em $\mathfrak{g}$, o colchete em $\bar{\mathfrak{g}}_2$ é dado por

$$\begin{aligned} [X + \alpha_1 c + \alpha_2 d, Y + \beta_1 c + \beta_2 d]_2 &= [X, Y] + \alpha_2 DY - \beta_2 DX + cB(DX, Y) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_2 v - \beta_2 y \\ \alpha_2 u - \beta_2 x \\ yu - xv \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

onde o colchete está representado como vetor em relação à base $\{E_1, E_2, c, d\}$ de $\bar{\mathfrak{g}}_2$.

A métrica ad-invariante B_2 de $\overline{\mathfrak{g}}_2$ é dada por

$$\begin{aligned} B_2(X+\alpha_1 c+\alpha_2 d, Y+\beta_1 c+\beta_2 d) &= B(X,Y)+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1 \\ &= xu-yv+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1. \end{aligned}$$

Calculando os colchetes não-nulos da base de $\overline{\mathfrak{g}}_2$:

$$[E_1,E_2]_2 = cB(DE_1,E_2) = -c$$

$$[E_1,d]_2 = \begin{pmatrix} 0.0-1.0 \\ 0.0-1.1 \\ 0.0-1.0 \\ 0 \end{pmatrix} = -E_2$$

$$[E_2,d]_2 = \begin{pmatrix} 0.1-1.1 \\ 0.0-1.0 \\ 1.0-0.0 \\ 0 \end{pmatrix} = -E_1.$$

Se considerarmos a nova base $\beta=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ de $\overline{\mathfrak{g}}_2$ onde $e_1=d$, $e_2=E_1+E_2$, $e_3=E_1-E_2$ e $e_4=2c$, os colchetes não-nulos são:

$$[e_1,e_2]_2 = [d,E_1]_2+[d,E_2]_2 = E_2+E_1 = e_2$$

$$[e_1,e_3]_2 = [d,E_1]_2-[d,E_2]_2 = E_2-E_1 = -e_3$$

$$[e_2,e_3]_2 = [E_1+E_2,E_1-E_2]_2 = -2[E_1,E_2]_2 = 2c = e_4$$

Vimos no exemplo 3 da seção de Álgebras de Lie solúveis que a subálgebra de Lie $\mathfrak{b}\subset\mathfrak{gl}(4,\mathbb{R})$ é solúvel:

$$\mathfrak{b} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & -x_1 & 0 \\ -2x_4 & -x_3 & x_2 & 0 \end{pmatrix} | x_i\in\mathbb{R},\ 1\le i\le 4 \right\}.$$

Podemos considerar a base $\alpha=\{\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3,\epsilon_4\}$ onde:

$$\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-2&0&0&0 \end{pmatrix} \right\}$$

e em relação a esta base os colchetes não-nulos são dados por:

$$[\epsilon_1,\epsilon_2]=\epsilon_2 \qquad [\epsilon_1,\epsilon_3]=-\epsilon_3 \qquad [\epsilon_2,\epsilon_3]=\epsilon_4.$$

Portanto, $\overline{\mathfrak{g}}_2$ **e** $\mathfrak{b}$ **possuem os mesmos coeficientes de estrutura, e então são álgebras de Lie isomorfas.** Novamente, basta definir $\varphi : \mathfrak{b} \longrightarrow \overline{\mathfrak{g}}_2$ tal que

$$\varphi(\epsilon_i) = e_i \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Também obtemos na seção de Álgebras de Lie solúveis que as métricas ad-invariantes em $\mathfrak{b}$ são da forma

$$[B_{\mathfrak{b}}]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde $b \neq 0$. Tomando a métrica $B_{\mathfrak{b}}$ dada por

$$[B_{\mathfrak{b}}]_\alpha^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pode-se verificar que

$$B_{\mathfrak{b}}(\epsilon_i, \epsilon_j) = B_2(\varphi(\epsilon_i), \varphi(\epsilon_j)) \quad \forall i,\ j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Portanto, φ **é uma isometria de álgebras de Lie, e então** $(\mathfrak{b}, B_{\mathfrak{b}})$ **e** $(\overline{\mathfrak{g}}_2, B_2)$ **são isométricas.**

Referências

[1] G. Favre and L. J. Santharoubane. Symmetric, invariant, non-degenerate bilinear forms on a lie algebra. *Journal of Algebra*, (105):451–464, 1987.

[2] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces.* Academic Press, 1978.

[3] K. Hoffmann and R. Kunze. *Linear Algebra (2nd Edition).* Pearson, 1971.

[4] J. Humphreys. *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* Springer-Verlag, 1972.

[5] L.A.B. San Martin. *Álgebras de Lie.* Editora da Unicamp, 1999.

[6] P. Pulino. Álgebra linear e suas aplicações - notas de aula. `https://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/`. 2016.

[7] Wulf Rossmann. *Lie Groups: An Introduction through Linear Groups.* Oxford University Press, 2006.

[8] G. Ovando V. del Barco and F. Vittone. On the isometry groups of invariant lorentzian metrics on the heisenberg group. *Mediterr. J. Math*, (11(1)):137–153, 2014.