

Dependência Espaço-Temporal : Estudo de um Problema Populacional Genérico

João Frederico C.A. Meyer

IMECC – UNICAMP - Departamento de Matemática Aplicada
Cidade Universitária Dr. Zefferino Vaz – Distrito de Barão Geraldo
CEP 13093-970, Campinas, SP, Brazil

Tânia Maria V. Salgado Lacaz

FEG – UNESP – Departamento de Matemática
Av.Dr. Ariberto Pereira Cunha 333 – Nova Guará
CEP 12500-000, Guaratinguetá, SP, Brazil

Resumo

Neste texto garantimos a existência e a unicidade da solução generalizada para um problema misto envolvendo uma equação de difusão-convecção que descreve um problema populacional genérico. Construímos uma solução aproximada para o problema considerado usando o Método de Galerkin com os elementos finitos de primeira ordem para a discretização espacial e, para a discretização temporal, o Método de Crank-Nicolson. Apresentamos os resultados de algumas simulações numéricas.

Palavras-chave: equações diferenciais parciais parabólicas, soluções generalizadas, existência e unicidade, soluções numéricas, elementos finitos.

1. Introdução:

A idéia do coeficiente de difusão, encarado como parâmetro de dispersão, variar com o tempo não é nova para os biólogos. De fato, tal situação está sempre presente na biologia. Por exemplo, muitos processos biológicos variam com o tempo porque o meio muda sazonalmente. Processos biológicos podem também variar com o tempo sem a ação motriz de uma força vinda diretamente do fenômeno analisado.

Motivados por uma variação temporal aparente na mobilidade dos insetos em seus experimentos, Banks, Kareiva & Lamm¹ estendem seus algoritmos para estimativa de parâmetros, a fim de tratar equações de transporte que contêm parâmetros com variação temporal bem como variação espacial. Diversas características podem justificar a dependência espacial dos coeficientes e da função fonte que aparecem nestas equações.

Apresentamos a seguir um problema populacional genérico, embora com alguma especificidade característica. O objetivo é descrever, durante um período fixo de tempo $[0, T]$, o comportamento de uma espécie em um meio não homogêneo, que apresenta variações sazonais - por exemplo diferenças grandes na temperatura - acarretando, periodicamente, uma variação nos índices de mortalidade e de natalidade da espécie.

Consideramos que o espalhamento geográfico é modelado por difusão, por processos advectivos ou convectivos e é afetado pela própria dinâmica vital da espécie, a qual, para pequenos períodos de tempo, assumimos malthusiana. Além disso, como o meio é não homogêneo, a difusão pode variar geograficamente. Com estas suposições pretendemos aproximar o modelo de situações efetivas.

Este problema populacional visa modelar, portanto, os seguintes fenômenos:

- Dispersão,
- Processos Advectivos ou Processos Convectivos (correspondentes a transporte induzido, migração, ou a fenômenos que ocorrem em função de níveis populacionais),
- Mortalidade da espécie devido a hostilidade do meio e uma
- Dinâmica Vital malthusiana - evidente simplificação fruto de um período de estudo relativamente curto.

A fim de analisar um caso bastante abrangente e, tendo em vista a não homogeneidade espacial e variações sazonais, consideramos os coeficientes e o vetor velocidade dos processos advectivos ou convectivos variando com o tempo e com as coordenadas espaciais.

Assumindo que a região de interesse possa ser descrita matematicamente por um subconjunto $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$ - na prática esse n assume os valores 1, 2 ou 3 - com Ω um aberto, conexo, limitado, com fronteira suficientemente regular Γ (Lions⁸), a formulação clássica do problema é dada por (ver, por exemplo, Banks, Kareiva & Lamm¹, Medeiros & Miranda⁹ e Meyer¹⁰):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \text{div}(\alpha \nabla u) + \text{div}(\mathbf{W}u) + \sigma' u = \lambda u + f(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, t \in (0, T], \quad (1)$$

$$u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (2)$$

$$u(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0, \quad t \in (0, T] \quad (3)$$

$$-\alpha \frac{\partial u}{\partial \eta}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad t \in (0, T] \quad (4)$$

onde

$u = u(t, \mathbf{x})$ representa a população ou a densidade populacional;

$\alpha = \alpha(t, \mathbf{x})$ é o coeficiente de difusão populacional;

$\sigma = \sigma'(t, \mathbf{x})$ é um coeficiente de decaimento da espécie, indicando, por exemplo, uma mortalidade devido a hostilidades do meio,

$\mathbf{W} = \mathbf{W}(t, \mathbf{x})$ é o campo de velocidades da migração;

λ é a taxa intrínseca de reprodução da espécie; e

$f = f(t, \mathbf{x})$ é uma fonte artificial (ou sumidouro) da espécie no meio Ω durante o período $(0, T]$; ainda, Γ_0 e Γ_1 disjuntos formam a fronteira Γ , e η designa a normal exterior em \mathbf{x} à curva Γ_1 .

A condição de contorno em Γ_0 indica que esta parte da fronteira está suficientemente distante para que se possa dizer que $u = 0$ em Γ_0 . A condição de contorno em Γ_1 indica que não existe entrada nem saída da população por esta parte da fronteira, ou seja, admite-se a existência de uma barreira física (margens de rio, montanhas, cercas, etc.) impedindo a passagem da população através de Γ_1 (esta condição pode aparecer em situação de simetria do domínio e, embora artificial no caso estudado, é justificável na formulação matemática).

A equação (1) com as condições (2), (3) e (4) tem sido utilizada em problemas populacionais para analisar, por exemplo, mudanças de habitats em populações de peixes devido a construções de barragens (Meyer & Diniz¹²). Também tem sido usada para descrever problemas de toxicologia como, por exemplo, localizar manchas de óleo geradas por vazamento em mares costeiros (Meyer & Cantão¹¹) e estudar problemas de impacto ambiental causados por poluentes agrotóxicos em lagoas (Bernardes²).

No presente texto iremos garantir a existência e a unicidade da solução generalizada para este sistema, demonstrando que são válidas as hipóteses de um teorema devido a Lions⁸. A partir deste resultado, construiremos uma discretização que permita obter aproximações da solução desejada.

2. A formulação fraca

Representamos por $W^{m,p}$ o espaço de Sobolev usual (Medeiros & Miranda⁹). Quando $p=2$ então $W^{m,2}(\Omega)$ corresponde ao espaço de Hilbert $H^m(\Omega)$. Para $m=0$ e $m=1$, respectivamente, usamos a notação especial $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$. No espaço $L^2(\Omega)$ o produto interno e a norma são definidos com a integração por Lebesgue:

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv d\mu, \quad \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} v(x)^2 d\mu.$$

O espaço $H^1(\Omega)$ é caracterizado por:

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, \dots, n \right\},$$

e o produto interno e a norma neste espaço são os seguintes:

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} uv d\mu + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mu, \quad e$$

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} v^2 d\mu + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 d\mu = \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Tendo em vista a condição de fronteira em Γ_0 , introduzimos o subespaço fechado

$V \subset H^1(\Omega)$ definido por:

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega) : \text{tr}(v) = 0 \text{ em } \Gamma_0 \right\}$$

Precisamos trabalhar em um espaço que incorpore a dependência do tempo. Portanto, sendo V espaço de Banach, $L^2((0, T); V)$ denota o espaço das funções quadrado integráveis a Lebesgue de $[0, T]$ em V .

A formulação fraca do problema (1), com as condições (3) e (4), consiste portanto em:

Dadas as funções $f \in L^2((0, T) \times \Omega)$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$,

procurar $u \in V = \{v \in L^2((0, T]; V) : \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2((0, T]; L^2(\Omega))\}$ tal que:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v d\mu - \int_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla v d\mu + \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \nabla u v d\mu + \int_{\Omega} (\sigma + \nabla \cdot \mathbf{W}) u v d\mu = \int_{\Omega} f v d\mu, \quad (5)$$

$$\int_{\Omega} u(0, \mathbf{x}) v d\mu = \int_{\Omega} u_0 v d\mu \quad \forall v \in V.$$

que pode ser escrita, seguindo Lions ⁸, como:

$$a(t; u, v) + D_t(u, v) = L_f(v) \quad \text{para todo } v \in V. \quad (6)$$

A forma bilinear $a(t; u, v)$ é definida por:

$$a(t; u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(t, \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} d\mu + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} a_j(t, \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_j} v d\mu + \int_{\Omega} a_0(t, \mathbf{x}) u v d\mu, \quad (7)$$

o operador $D_t(u, v)$ por

$$D_t(u, v) = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v \right)_{\Omega} = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v d\mu, \quad (8)$$

e a forma linear $L_f(v)$ por

$$L_f(v) = (f, v)_{\Omega} = \int_{\Omega} f v d\mu. \quad (9)$$

Então, por (5) e (6), têm-se:

$$a_{ij}(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} \alpha(t, \mathbf{x}) & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad (10)$$

$$a_i(t, \mathbf{x}) = W_i(t, \mathbf{x}),$$

$$a_0(t, \mathbf{x}) = \sigma(t, \mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W_i}{\partial x_i},$$

e a forma bilinear (7) é dada por:

$$a(t; u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \alpha(t, \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mu + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} W_i(t, \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\mu + \int_{\Omega} (\sigma(t, \mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W_i}{\partial x_i}) u v d\mu. \quad (11)$$

Uma grande vantagem da formulação variacional, na comparação com a formulação clássica, reside no fato de que, em função de condições menos restritivas sobre a solução, perturbações e parâmetros, alguns resultados podem ser mais facilmente obtidos.

3. Existência e Unicidade da solução fraca

Em termos de existência e unicidade da solução procurada, provaremos que são válidas as condições do seguinte teorema de Lions ⁸:

Teorema 1: Dadas $f \in L^2((0, T) \times \Omega)$ e $u_0 \in L^2(\Omega)$, se a forma bilinear $a(t; u, v)$ é tal que, sendo $\alpha(t, x)$, $W_i(t, x)$ e $\frac{\partial W_i}{\partial x_i}$ ($i = 1, \dots, n$), $\sigma(t, x) \in L^\infty((0, T) \times \Omega)$ valem:

(i) $\forall u, v \in V$, a função $t \rightarrow a(t; u, v)$ é mensurável,

(ii) $\exists M > 0$ tal que $|a(t; u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$,

(iii) $\exists \varepsilon > 0$ tal que

$$a(t; v, v) + \varepsilon \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \delta \|v\|_V^2, \text{ para algum } \delta > 0, \forall v \in V,$$

(iv) $L_f(v)$ é contínua em V ,

então existe uma única solução $u \in L^2((0, T]; V)$ que é solução do problema variacional (6), com a condição inicial dada como em (5).

Como $\alpha(t, x)$, $W_i(t, x)$ e $\frac{\partial W_i}{\partial x_i}$ ($i = 1, \dots, n$), $\sigma(t, x) \in L^\infty((0, T) \times \Omega)$ estão definidas as

seguintes constantes:

$$\rho = \sup_{(t,x) \in (0,T] \times \Omega} |\alpha(t, x)|,$$

$$\beta_i = \sup_{(t,x) \in (0,T] \times \Omega} |W_i(t, x)| \quad \text{e} \quad \beta = \max_{i=1, \dots, n} \{\beta_i\},$$

$$\gamma = \sup_{(t,x) \in (0,T] \times \Omega} \left| \sigma(t, x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W_i}{\partial x_i} \right|,$$

(12)

e, também

$$\omega = \inf_{(t,x) \in (0,T] \times \Omega} \alpha(t, x) \text{ e}$$

$$\vartheta = \inf_{(t,x) \in (0,T] \times \Omega} \left(\sigma(t, x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W_i}{\partial x_i} \right).$$

(13)

Demonstração do teorema 1:

De fato:

(i) **$a(t; u, v)$ é mensurável** pois, pela sua própria definição, $a(t; u, v)$ é uma combinação linear de funções mensuráveis.

(ii) **Continuidade de $a(t; u, v)$** : Para cada $t \in (0, T]$ temos, de acordo com as definições dadas em (12):

$$\begin{aligned}
|a(t; u, v)| &\leq \rho \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| d\mu + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \beta_j \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} v \right| d\mu + \gamma \int_{\Omega} |uv| d\mu \leq \\
&\leq \rho \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| d\mu + \beta \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} v \right| d\mu + \gamma \int_{\Omega} |uv| d\mu, \quad \forall u, v \in V.
\end{aligned} \tag{14}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz em (14), temos:

$$|a(t; u, v)| \leq (\rho + \beta + \gamma) \|u\|_V \|v\|_V \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \text{sendo } M = (\rho + \beta + \gamma);$$

logo, $a(t; u, v)$ é contínua em $V \times V$.

(iii) $\exists \varepsilon > 0$ tal que $a(t; v, v) + \varepsilon \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \delta \|v\|_V^2$, para algum $\delta > 0$, $\forall v \in V$.

Para cada $t \in (0, T]$ temos:

$$\begin{aligned}
a(t; v, v) + \varepsilon \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \alpha(t, x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mu + \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} W_j(t, x) \frac{\partial v}{\partial x_j} v d\mu + \\
&\quad + \int_{\Omega} (\sigma(t, x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W_i}{\partial x_i}) v^2 d\mu + \varepsilon \int_{\Omega} v^2 d\mu.
\end{aligned}$$

e, de acordo com as definições dadas em (13):

$$\begin{aligned}
a(t; v, v) + \varepsilon \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 &\geq \omega \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 d\mu - \beta \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right| |v| d\mu + (\vartheta + \varepsilon) \int_{\Omega} v^2 d\mu \geq \\
&\geq \omega \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \beta \|v\|_{L^2(\Omega)} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} + (\vartheta + \varepsilon) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Faremos agora o uso de um recurso clássico obtido da desigualdade:

$$-ab \geq -\frac{\theta}{2} a^2 - \frac{1}{2\theta} b^2$$

para quaisquer a, b e θ positivos, que, aplicada ao segundo termo da inequação

anterior, tomando $a = \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}$ e $b = \|v\|_{L^2(\Omega)}$ implica que:

$$\begin{aligned}
a(t; v, v) + \varepsilon \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 &\geq \omega \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\beta \theta}{2} \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 + \left(\vartheta + \varepsilon - \frac{\beta}{2\theta} \right) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \\
&\geq \omega \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\beta \theta}{2} \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) + \left(\vartheta + \varepsilon - \frac{\beta}{2\theta} \right) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \\
&\geq \left(\omega - \frac{\beta \theta}{2} \right) \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\beta \theta n(n-1)}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\vartheta + \varepsilon - \frac{\beta}{2\theta} \right) \|v\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Sendo $\chi = \min \left\{ \left(\omega - \frac{\beta\theta}{2} \right), \left(\vartheta + \varepsilon - \frac{\beta}{2\theta} \right) \right\}$, temos, na última desigualdade:

$$\begin{aligned} a(t; v, v) + \varepsilon \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 &\geq \chi \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) - \frac{\beta\theta n(n-1)}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \\ &= \chi \|v\|_V^2 - \frac{\beta\theta n(n-1)}{2} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \left(\chi - \frac{\beta\theta n(n-1)}{2} \right) \|v\|_V^2. \end{aligned}$$

Escolhendo ε e θ convenientemente de tal forma que $\chi > 0$ e $\delta = \chi - \frac{\beta\theta n(n-1)}{2} > 0$

temos que:

$$a(t; v, v) + \varepsilon \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \delta \|v\|_V^2 \text{ para todo } v \in V.$$

Vale a pena observar que as hipóteses do Teorema 1 - mais precisamente esta hipótese (iii) - não são as mesmas classicamente usadas nos teoremas de existência e unicidade para equações diferenciais parciais, as quais, se fossem utilizadas no presente texto incluiriam a exigência da coercividade do operador bilinear $a(t; u, v)$. Optou-se aqui por utilizar um teorema devido a Lions⁸ que garante, com a hipótese menos restritiva de quase-coercividade de $a(t; u, v)$ explicitada na condição (iii) do Teorema e verificada aqui, a existência e a unicidade de solução para o problema variacional (6).

(iv) Continuidade do operador linear $L_f(v)$

Ora,

$$\left| L_f(v) \right| = \left| \int_{\Omega} f(t, x) v(x) d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f(t, x)| |v(x)| d\mu \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_V,$$

$\forall v \in V$,

portanto $L_f(v)$ é contínuo.

Estão garantidas, então, a existência e a unicidade da solução fraca do problema (6). Passamos, a seguir, à construção de uma solução aproximada para o problema variacional, através de discretizações espacial e temporal e usando os Métodos de Galerkin e dos Elementos Finitos.

4. O Modelo Discreto

Escolhendo em $V = \{v \in H^1(\Omega) : \text{tr}(v) = 0 \text{ em } \Gamma_0\}$, N funções linearmente independentes φ_i , $i=1, \dots, N$ a serem oportunamente descritas, denotamos por V_h o subespaço fechado de V , de dimensão N , gerado por $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$.

Procuramos uma aproximação u_h da solução $u \in V = \{v \in L^2((0, T]; V) : \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2((0, T]; L^2(\Omega))\}$, considerando em u_h uma separação de variáveis, na forma

$$u_h(t; x, y) = \sum_{j=1}^N u_j(t) \varphi_j(x, y) \text{ e que} \quad (15)$$

satisfaça (6) para toda $v \in V_h$ e para a qual

$$\frac{\partial u_h(t; x, y)}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \frac{du_j(t)}{dt} \varphi_j(x, y). \quad (16)$$

O espaço vetorial das funções da forma (15) será denotado por V_h .

Desde que as funções $\varphi_j(x, y)$ sejam conhecidas, a aproximação u_h será completamente determinada ao calcularmos as N funções $u_j(t)$, $j=1, \dots, N$, que correspondem aos coeficientes da discretização (15).

Para verificar que (6) vale para cada $v \in V_h$, basta verificar que vale para cada elemento da base B .

Agora então, o problema (6) no subespaço V_h de V , (isto é, com u_h definido em (15)) passa a ser o seguinte:

Achar $u_h(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t))$ suficientemente regular para que se possa ter:

$$a(t; u_h, v) + \left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, v \right) = L_f(v), \quad \forall v \in V_h \quad (17)$$

com

$$a(t; u_h, v) = \iint_{\Omega} \alpha(t, x, y) \nabla u_h \cdot \nabla v \, dx \, dy + \iint_{\Omega} \mathbf{W}(t, x, y) \cdot \nabla u_h \, v \, dx \, dy + \iint_{\Omega} (\sigma(t, x, y) + \nabla \cdot \mathbf{W}(t, x, y)) u_h \, v \, dx \, dy, \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, v \right) = \iint_{\Omega} \frac{\partial u_h}{\partial t} v \, dx \, dy \quad e \quad (19)$$

$$L_f(v) = \iint_{\Omega} f(t, x, y) v \, dx \, dy, \quad (20)$$

e, para a condição inicial

$$L_{u_0}(v) = \iint_{\Omega} u_0(x, y) v \, dx \, dy. \quad (21)$$

Fazendo $v = \varphi_i$, $i=1, \dots, N$, e substituindo em (17), tendo em vista as equações (15) e (16), temos um sistema de N equações diferenciais lineares ordinárias de primeira ordem:

$$\sum_{j=1}^N (\varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \frac{du_j}{dt} + \sum_{j=1}^N \left\{ (\alpha \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i)_{\Omega} + (\mathbf{W} \varphi_j, \nabla \varphi_i)_{\Omega} + (\sigma \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} \right\} u_j = (f, \varphi_i)_{\Omega}, \quad (22)$$

$\forall \varphi_i \in B$.

onde consideramos $\nabla \cdot \mathbf{W} = 0$ e,

$$(\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i)_{\Omega} = \iint_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j \, dx \, dy$$

$$(\mathbf{W} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_{\Omega} = \iint_{\Omega} \left(W_1 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \varphi_i + W_2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \varphi_i \right) dx \, dy.$$

Uma escolha natural para o vetor inicial na formulação integral do problema é obtida por projeção de u_0 na base B , ou seja:

$$\sum_{j=1}^N (\varphi_j, \varphi_i) u_j(0) = (u_0, \varphi_i), \quad \forall \varphi_i \in B. \quad (23)$$

Definindo:

$$A = (A_{ij}) = (\varphi_j, \varphi_i)_\Omega, \quad D = (D_{ij}) = (\mathbf{W} \cdot \nabla \varphi_j, \varphi_i)_\Omega, \quad U = (U_j(t)) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \dots \\ u_N(t) \end{pmatrix},$$

$$B = (B_{ij}) = (\alpha \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i)_\Omega, \quad C = (C_{ij}) = (\sigma \varphi_j, \varphi_i)_\Omega, \quad F = (F_i) = (f, \varphi_i)_\Omega \quad \text{e} \quad (24)$$

$$\hat{U}_0 = \left(\hat{U}_{0,i} \right) = (u_0, \varphi_i)_\Omega$$

sendo $M = B + D + C$, podemos escrever o sistema linear (22) na forma matricial:

$$\begin{cases} A \frac{dU}{dt} + MU = F \end{cases} \quad (25)$$

sendo que o vetor inicial $U_0 = \{u_j(0)\} \quad j = 1, 2, \dots, N$ será calculado diretamente como:

$$AU_0 = \hat{U}_0. \quad (26)$$

5. A Discretização Espacial: O Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos consiste na construção de uma malha - através da discretização do domínio - na escolha do espaço de funções teste e das funções da base B (Carey & Oden ³, Ciarlet ⁴ ou Kardestuncer ⁶, por exemplo).

Conforme foi estabelecido anteriormente, o espaço de funções será o subespaço fechado denotado por V_h , gerado pelo conjunto B . As funções da base B serão funções lineares por partes definidas no domínio discretizado Ω_h obtido através da triangularização de Ω .

Na aproximação numérica de equações com termos advectivos - $\nabla \cdot (\mathbf{W} u)$ - podem surgir oscilações artificiais provenientes do processo numérico, quando há uma dominância deste termo. Estabelece-se então um critério que forneça uma condição sobre a discretização do domínio; esta condição, denominada "Condição de Peclet" (Heinrich *et al*⁵), e é:

$$\frac{|W_i| \Delta x_i}{2\alpha} < 1 \quad (27)$$

onde W_i é a i -ésima componente do vetor \mathbf{W} da migração, Δx_i é a dimensão máxima da discretização (ou subintervalo) na direção Δx_i e α é o coeficiente de difusão, no caso em que α é constante. Iremos também supor que $\nabla \cdot \mathbf{W} = 0$.

6. A Discretização Temporal : O Método de Crank-Nicolson

Utilizamos o Método de Crank-Nicolson para discretizar a variável temporal do sistema (25). O Método consiste em usar, em (25), as aproximações:

$$u_j(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \cong \frac{u_j(t_n) + u_j(t_{n+1})}{2}$$

e

$$\frac{du_j}{dt}(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \cong \frac{u_j(t_{n+1}) - u_j(t_n)}{\Delta t}$$
(28)

ambas de ordem de Δt^2 e estimadas em $t = t_n + \frac{\Delta t}{2}$.

Adotando a notação:

$$U(t_{n+1}) = U^{(n+1)}, \quad U^{(n+1)} = \begin{pmatrix} u_1^{(n+1)} \\ u_2^{(n+1)} \\ \dots \\ u_N^{(n+1)} \end{pmatrix}$$
(29)

com $u_j^{(n+1)} \cong u(t_{n+1}, x_j, y_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$, no sistema (25), e isolando os termos calculados em $(n+1)$ e n , vem (com a notação dada em (24)):

$$\begin{cases} \left(A + \frac{\Delta t}{2} M^{(n+1/2)} \right) U^{(n+1)} = \left(A - \frac{\Delta t}{2} M^{(n+1/2)} \right) U^{(n)} + \Delta t F^{(n+1/2)}, \\ AU^{(0)} = \hat{U}_0. \end{cases}$$
(30)

7. Resultados de Simulações Numéricas¹.

Foram realizados alguns ensaios numéricos a fim de se obterem visualizações gráficas da solução aproximada do problema genérico descrito pelas equações (1), (2), (3) e (4). Nesses ensaios todos os valores atribuídos aos parâmetros e funções que aparecem nas equações, bem como os valores atribuídos aos parâmetros da discretização, foram definidos a partir de conveniência visual, obedecendo às restrições impostas pelos métodos de aproximações utilizados.

Parâmetros do Domínio:

O domínio do problema para discussões iniciais da modelagem e da aproximação é definido matematicamente pela região plana dada por $\Omega^* = [0, 2] \times [0, 2] = \Omega_1^* \cup \Omega_2^*$, com Ω_1^* e Ω_2^* caracterizando duas regiões de configurações geográficas distintas, conforme indica a figura 1(a).

Condições de simetria não somente na geometria escolhida mas também nos comportamentos dos parâmetros envolvidos, permitem reduzir o domínio a um quarto do original. O domínio utilizado nas simulações é definido, então, por $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] = \Omega_1 \cup \Omega_2$ conforme ilustra a figura 1(b).

¹ Os programas e os gráficos foram desenvolvidos com o software MATLAB versão 4.2.

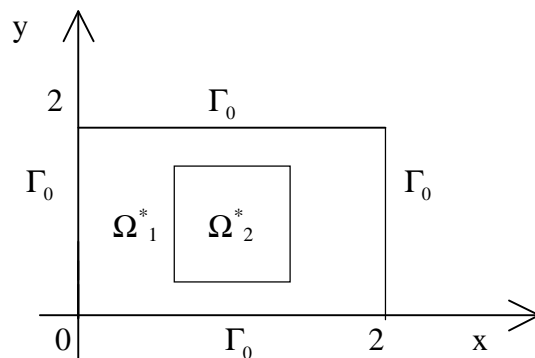


Figura 1(a): Domínio do problema.

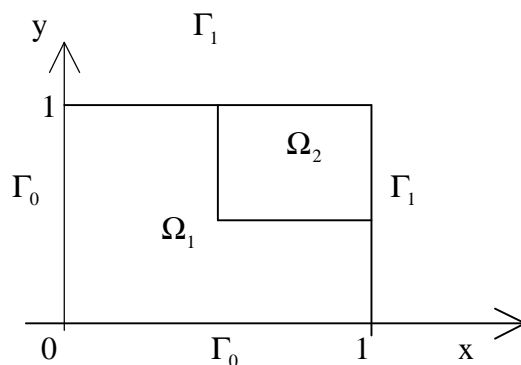


Figura 1(b): Domínio utilizado nas simulações numéricas.

O período de tempo considerado é indicado pelo intervalo $[0, T]$.

Parâmetros da Discretização:

Os valores utilizados na discretização são:

$N_x = 8$: número de subintervalos de $[0, 1]$ no eixo x .

$N_y = 8$: número de subintervalos de $[0, 1]$ no eixo y .

$N_t = 300$: número de passos no tempo.

A estes valores correspondem:

$\Delta x = 0.125$, $\Delta y = 0.125$ e $\Delta t = 0.12$.

Parâmetros do Problema:

Alguns parâmetros do problema, que aparecem nas equações (1), (2), (3) e (4) são fixados; são eles:

$\lambda = 0.1$: taxa intrínseca, considerada como sendo da ordem de 10%.

O coeficiente de difusão α , definido como:

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_1 & \text{para } (x, y) \in \Omega_1 \\ \alpha_2 & \text{para } (x, y) \in \Omega_2 \end{cases}$$

sendo α_1 e α_2 constantes.

A condição inicial é dada por $u_0(0, x, y) = 0.5$ nos nós #55, #56, #63 e #64, e zero nos demais. Isto corresponde a considerar a condição inicial concentrada no meio da região, como ilustra a figura 2. Em termos práticos seria como liberar uma quantidade de indivíduos na região delimitada pelos quatro nós, correspondente a 0.5 indivíduo por unidade de área.

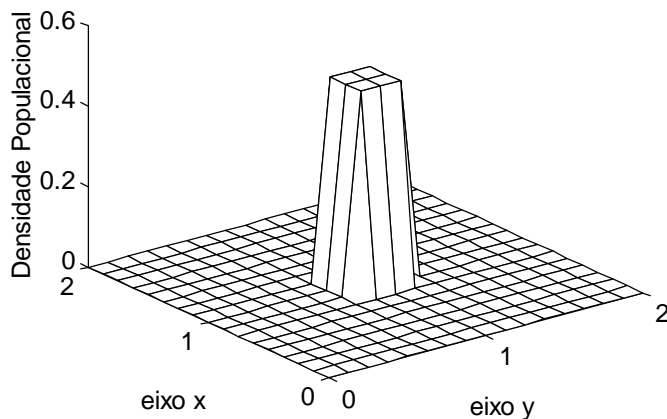


Figura 2: Condição inicial utilizada nas simulações numéricas.

O termo de fonte $f(t,x,y) = 0.01$ nos mesmos nós citados acima e zero nos demais, ou seja, considera-se uma fonte artificial inserindo indivíduos continuamente na população, desde o instante inicial até o instante final, concentrada no meio da região de interesse.

Os demais parâmetros assumem valores diferentes, conforme o ensaio realizado. Seus valores e resultados obtidos usando 300 iterações para atingir o tempo T são os seguintes:

Ensaio 1: Dispersão como difusão pura, sem migração.

$W = (0,0)$: não há migração.

$\sigma = \sigma' - \lambda = -0.05$: diferença entre o coeficiente de decaimento e a taxa intrínseca de crescimento populacional².

A figura 3a representa a distribuição final da população para o caso em que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.007$.

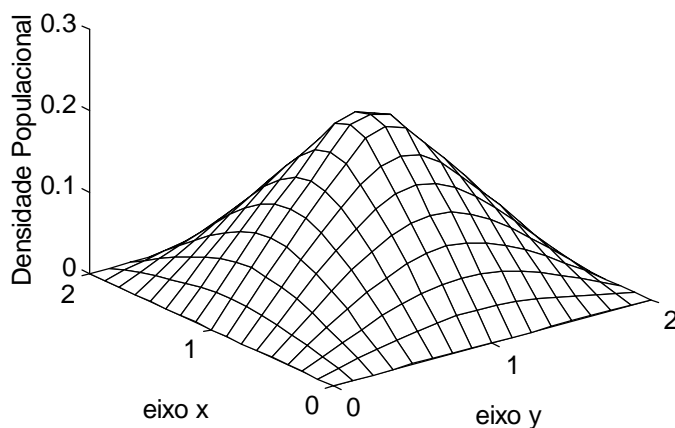


Figura 3a: Distribuição final da população com difusão constante, sem migração e com fonte.

² Para um visão de possíveis valores de dispersão ver Kareiva ⁶.

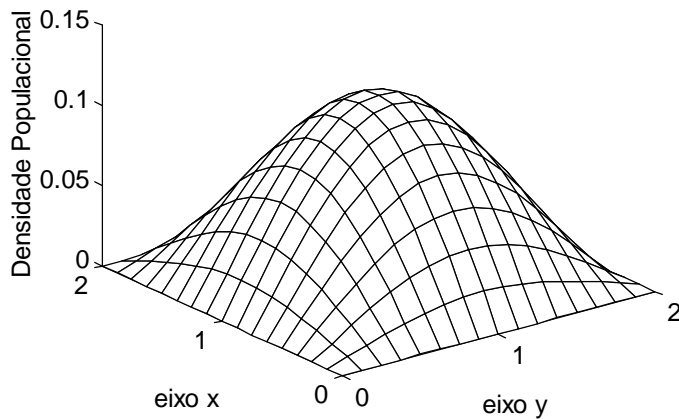


Figura 3b: Distribuição final da população com difusão constante, sem migração e sem fonte.

A figura 3b representa o mesmo ensaio, considerando-se o termo de fonte $f = 0$. Neste caso nota-se que o espalhamento da população é suave, e qualquer corte paralelo ao eixo vertical produziria uma curva qualitativamente semelhante a uma curva de Gauss.

A figura 4 ilustra o caso:

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_1 = 0.007 & (x, y) \in \Omega_1 = \Omega - \Omega_2 \\ \alpha_2 = 0.0035 & (x, y) \in \Omega_2 = (0.5, 1.5) \times (0.5, 1.5) \end{cases}$$

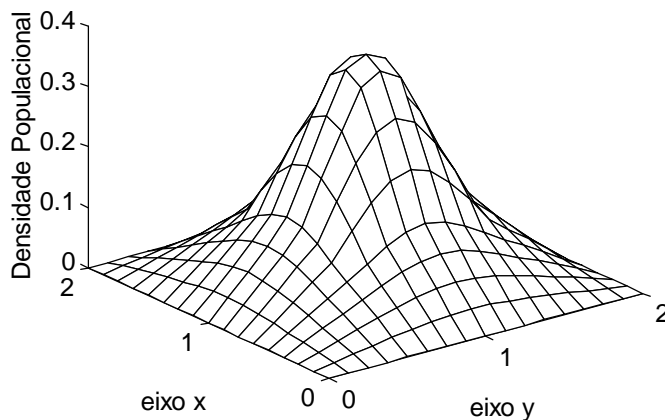


Figura 4: Distribuição final da densidade populacional, para o caso em que $\alpha_1 = 2\alpha_2$.

Como a condição inicial está concentrada no centro da região, a difusão tem início lentamente com difusibilidade α_2 em Ω_2 , e dobra de valor quando os indivíduos alcançam o sub-domínio Ω_1 causando um espalhamento rápido da população.

Já na figura 5, como foram considerados $\alpha_1 = 0.0035$ e $\alpha_2 = 0.007$, ocorre o inverso, ou seja, em Ω_1 a difusão é mais lenta o que “prende” os indivíduos por mais tempo em Ω_2 gerando aí uma espécie de platô.

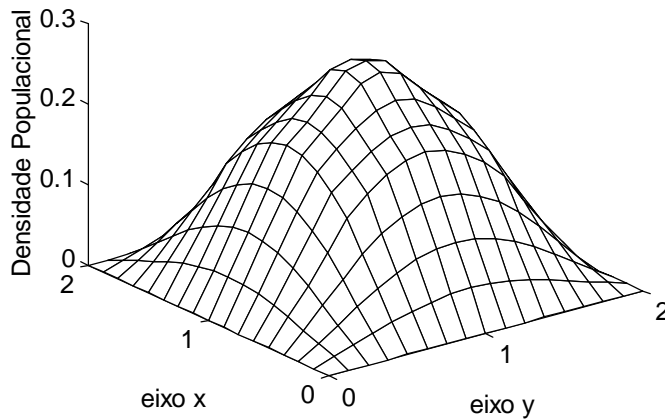


Figura 5: Distribuição final da densidade populacional, para o caso em que $\alpha_1 = \alpha_2/2$.

Ensaio 2: Dispersão como difusão e migração (considerada aqui como processo convectivo).

$W = (W_1, W_2) = (-0.05, 0)$: existe migração populacional na direção do eixo dos x.

$\sigma = -0.05$ como no primeiro ensaio.

Biologicamente esta formulação matemática poderia representar, por exemplo, uma armadilha de feromônio localizada no local caracterizado através do segmento de reta $x = 1, 0 \leq y \leq 2$, conforme indica a figura 6. As linhas pontilhadas indicam a divisão, por simetria, do domínio original.

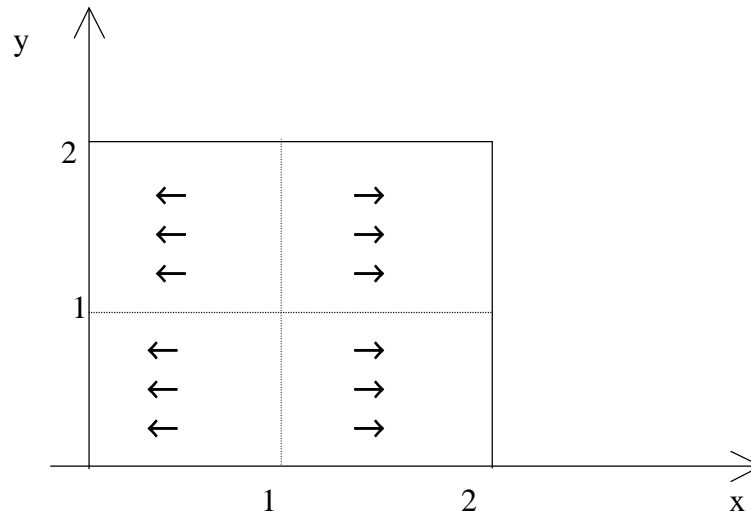


Figura 6: Campo de velocidades da migração.

É importante salientar que a condição de Peclet é satisfeita sempre, ou seja, para qualquer valor de α definido no domínio e em qualquer instante.

As figuras 7 e 8 mostram, claramente, o movimento dirigido pela presença do campo de velocidades atuando na direção do eixo dos x.

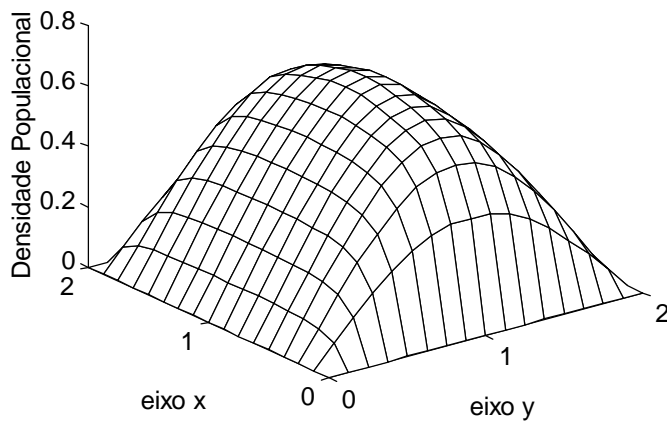


Figura 7: Distribuição final da densidade populacional com migração para o caso $\alpha_1 = \alpha_2$.

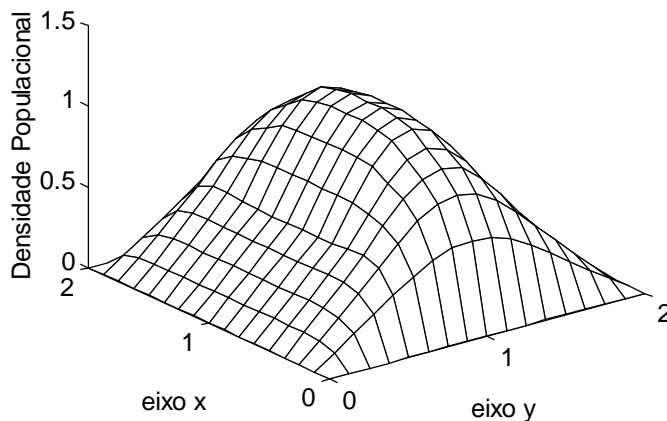


Figura 8: Distribuição final da densidade populacional com migração para o caso $\alpha_1 = 2\alpha_2$.

Ensaio 3: Dispersão como difusão e migração, com mortalidade variável.

$W = (W_1, W_2) = (-0.05, 0)$: existe migração populacional na direção do eixo dos x.

$\sigma'(t) = \frac{m_M}{2}(\sin \omega t + 1)$, modelando uma mortalidade variando sazonalmente no meio,

sendo $m_M = 0.15$ a mortalidade máxima atingida no meio Ω , e $\omega = 4\Pi / 201\Delta t$ para que, em cada 100 iterações no tempo seja completado um período da variação de $\sigma(t) = \sigma'(t) - \lambda$, igual a 2Π .

Embora na figura 9 não fique evidente a diferença de comportamento da população quando se considera a variação temporal de σ , a indicação no eixo z quantifica essa diferença no caso em que $\alpha_1 = 2\alpha_2$

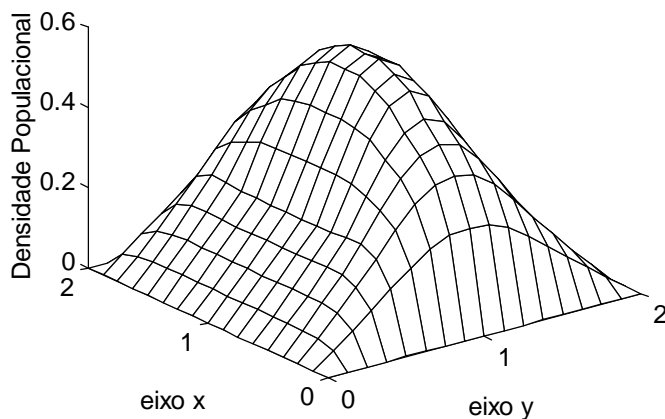


Figura 9: Distribuição final da densidade populacional com migração e com decaimento variável, para o caso $\alpha_1 = 2\alpha_2$.

A figura gerada no instante final talvez não seja a mais adequada para se perceber o fenômeno; as figuras 10 e 11 representam bem esta situação para um nó fixado. A figura 10 representa o acompanhamento da densidade populacional no nó #36 ao longo do tempo, nas condições do ensaio 2, para o caso $\alpha_1 = 2\alpha_2$. A figura 11 representa a densidade populacional do mesmo nó porém nas condições do ensaio 3.

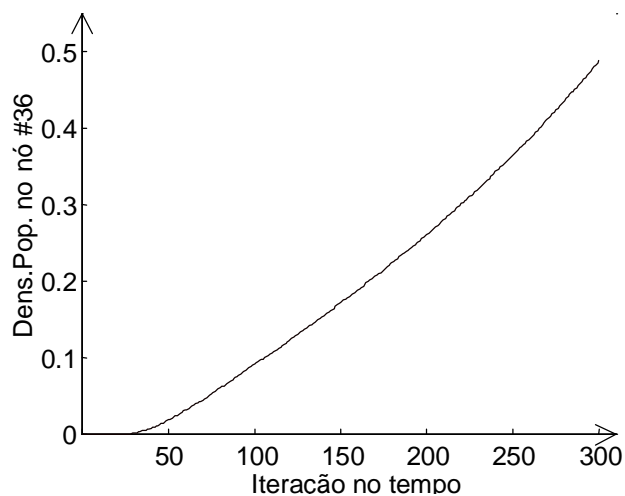


Figura 10: Variação da densidade populacional no nó #36 no Ensaio 2, para o caso $\alpha_1 = 2\alpha_2$.

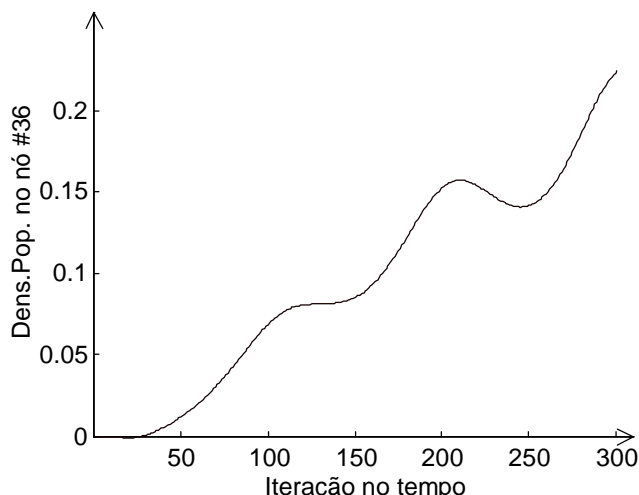


Figura 11: Variação da densidade populacional no nó #36 no Ensaio 3, para o caso $\alpha_1 = 2\alpha_2$.

O modelo e o algoritmo apresentados neste texto, além de aceitarem outros valores nos coeficientes e funções, são facilmente adaptáveis a novas definições, em casos práticos. Esperamos, com isto, aplicá-los, não só pela segurança dos resultados obtidos quanto pela garantia de existência, unicidade de solução, e convergência do método numérico, como também por considerarem a variação espacial e temporal dos parâmetros e características que eventualmente possam estar envolvidos em um modelo real.

Bibliografia:

- 1 BANKS, H.T., KAREIVA, P.M., LAMM, P.K. Modeling insect dispersal and estimating parameters when mark-release techniques may cause initial disturbances. *Journal of Mathematical Biology* n.22, p.259-77, 1985.
- 2 BERNARDES, M. *Poluição de Corpos Aquáticos de Baixa Circulação. Tese de Mestrado*, Campinas: IMECC-UNICAMP, 1998.
- 3 CAREY, G.F., ODEN, J.T. *Finite Elements* v.I. New Jersey: Prentice Hall, 1984.
- 4 CIARLET, P.G. *The Finite Element Method, Study in Mathematics and its Applications*. North Holland. 1978.
- 5 HEINRICH, J.C. et al. Un Upwind Finite Element Scheme for Two-Dimensional Convective Transport Equation. *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, n.11, p.131-43, 1977.
- 6 KARDESTUNCER, H., NORRIE, D.H. *Finite Element Handbook*. New York: MacGraw-Hill, 1987.
- 7 KAREIVA, P.M. Local movement in herbivorous insects: applying a passive diffusion model to mark-recapture field experiments. *Oecologia*, n.57, p.322-27, 1983.
- 8 LIONS, J.L. *Equations Diferentielles Operationelles et Problèmes aux Limites*. Berlin-Gottingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1961.
- 9 MEDEIROS, L.A., MIRANDA, M.M. *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*. Rio de Janeiro, Brasil: IM-UFRJ, 1989.

- 10 MEYER, J.F.C.A. *Modelagem e Simulação Numérica do Transiente Térmico em Meios Compostos. Tese de Doutorado*. Campinas: IMECC-UNICAMP, 1988.
- 11 MEYER, J.F.C.A., CANTÃO, R. An introductory mathematical model and numerical analysis of the evolutionary movement of oil slicks in coastal seas: a case study. In Zanetti, P., Brebbia C. A. *Development and Application of Computer Techniques to Environmental Studies IV*. Computational Mechanics Publications. p. 141-150. 1996.
- 12 MEYER, J.F.C.A., DINIZ, G.L. Changes of habitat of fish populations: a mathematical model. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, v. 28, n. 4, p. 519-29, 1997.
- 13 MURRAY, J.D. *Mathematical Biology*. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- 14 OKUBO, A. *Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1980.
- 15 SKELLAM, J.G. Random dispersal in theoretical populations. *Biometrika*. n.38, p.196-218, 1951.