RELATÓRIO DE PESQUISA

EL USO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ALGEBRAICAS (EDAs) PARA LA SOLUCION NUMERICA DE ALGUNAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDPs).

Lilliam Alvarez

and

Ignacio J. Sánchez

Julho RP 50/97

INSTITUTO DE MATEMÁTICA
ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Este Trabajo fue terminado durante la visita de la Dra. Lilliam Alvarez Diaz al IMECC -UNICAMP, como Miembro Asociada de la Academia de Ciencias del Tercer Mundo (TWAS) bajo el Convenio CNPq/TWAS.

Junio - 1997

RESUMEN - Se describen las fórmulas de diferencias retrógradas y los métodos multi-paso como vía para la solución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales-algebraicas (EDAs) con condiciones iniciales.

Se plantea la solución de algunas ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) discretizadas por el método de Líneas y llevadas a problemas de valor inicial para EDAs. Se ilustra un algoritmo con un caso real del cálculo de estructuras en Ingeniería Civil.

IMECC - UNICAMP
Universidade Estadual de Campinas
CP 6065
13083-970 Campinas SP
Brasil

Julho - 1997

The author is a visting professor at IMECC/UNICAMP.

EL USO DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ALGEBRAICAS (EDAs) PARA LA SOLUCION NUMERICA DE ALGUNAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES (EDPs).

Lilliam Alvarez, Ignacio J. Sánchez
Instituto de Cibernética, Matemática y Fisica.Calle E #309 esq a 15, Vedado, Habana, Cuba.
E-mail : lilliam@cidet.icmf.inf.cu

RESUMEN

Se describen las fórmulas de diferencias retrógradas y los métodos multipaso como vía para la solución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales-algebraicas (EDAs) con condiciones iniciales.
Se plantea la solución de algunas ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) discretizadas por el método de Líneas y llevadas a problemas de valor inicial para EDAs. Se ilustra un algoritmo con un caso real del cálculo de estructuras en Ingeniería Civil.

ABSTRACT

The backward difference formulae and the multistep methods are described as a suitable way for the solution of initial value problems for differential-algebraic equations. The numerical solution of PDEs is presented using the method of lines . The algorithm is illustrated with a real problem of the Civil Engineering .

1.- INTRODUCCION

A partir de 1971 con los trabajos de W. Gear comenzaron a desarrollarse las formulas en diferencias retrógradas para la solución de ecuaciones diferenciales algebraicas (EDAs) para problemas de valor inicial
Los resultados de Marz y Griepentrog, así como los de Linda Petzold en la decáda de los 80 fueron fundamentales tanto para el avance en la comprensión teórica de las EDAs, como para el rediseño de los métodos multipaso y de las formulas en diferencias retrógradas para su solución numérica
Hasta el año 1989, antes de la aparición del código DASSL en FORTRAN 77 [1], la solución de las EDAs planteadas en problemas de aplicaciones se resolvian con los códigos para problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de tipo stiff, como el LSODI de Hindmarsch [2].
Al estar disponible para el público el código DASSL, se abrieron las puertas a la solución de las EDAs de valor inicial de índice cero y uno que se planteaban de forma más natural en numerosas aplicaciones.
Por otra parte , el planteamiento del Método de Líneas para la solución de Ecuaciones en Derivadas Parciales transformadas en EDOs al discretizar sólo algunas variables, causó un "boom" en la década de los 80 [7],[6], con el uso de paquetes altamente eficientes como ODEPACK, y las familias LSODE, LSODI, LSODA para problemas no-stiff y stiff.
En [1] se reporta la solución del modelo de flujo de un fluido viscoso incomprensible (ecuaciones de Navier-Stokes), la solución de un problema de transmisión de gas por una red, el problema de una malla adaptativa, etc. A todos ellos se les aplicó exitosamente el algoritmo: Método de Líneas-DASSL.
Con DASSL, quedó entonces despejado el problema de poder resolver las EDAs obtenidas al aplicar el Método de Líneas a las EDPs y a los sistemas de EDPs mas ecuaciones algebraicas, como el ejemplo de Ingeniería Civil que se plantea en este trabajo.

2. LOS METODOS MULTIPASO

Para el caso de un problema de valor inicial (PVI)

$$y' = f(t,y) \qquad (2.1)$$

$$y(t_0) = y_0 \qquad (2.2)$$

la idea básica de los métodos de multipaso, [4] es integrar (2.1) en el intervalo $[t_n, t_{n+1}]$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt$$

es decir

$$y_{n+1} - y_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))dt \qquad (2.3)$$

Sustituyendo $f(t,y)$ por un polinomio de interpolación, por ejemplo, por el polinomio de Newton para diferencias finitas retrógradas en los nodos $t_n, t_{n-1}, \dots, t_{n-k}$

$$P_k(t_n - \tau h) = f_n - \frac{\tau}{1!}\Delta f_{n-1} + \frac{\tau(\tau-1)}{2!}\Delta^2 f_{n-2} + \dots + \frac{(-1)^k \tau(\tau-1)(\tau-2)\dots(\tau-(k+1))\Delta^k f_{n-k}}{k!} \qquad (2.4)$$

donde $\tau = \dfrac{t_n - t}{h}$ $\qquad dt = -hd\tau$

y $\Delta f_{n-1} = f_n - f_{n-1}$, $\quad \Delta^2 f_{n-2} = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}$, $\quad \Delta^3 f_{n-3} = f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}$
son las llamadas diferencias retrógradas de $f(t,y)$.

Sustituyendo (2.4) en (2.3) e integrando se obtiene

$$y_{n+1} = y_n + h[a_0 f_n + a_1 \Delta f_{n-1} + a_2 \Delta^2 f_{n-2} + \dots + a_k \Delta^k f_{n-k}]$$

donde las a_i se determinan como

$$a_i = (-1)^{i+1} \int_0^1 \frac{\tau(\tau-1)(\tau-2)\dots(\tau-(i-1))}{i!} d\tau$$

Así por ejemplo, para $i = 0$ se obtiene

$$a_0 = -\int_0^1 d\tau$$

y por tanto

$$y_{n+1} = y_n + ha_0 f_n$$
$$y_{n+1} = y_n + hf_n$$

que no es más que el Método de Euler explícito de orden $k = 1$.
Asimismo para $i = 1$ se obtiene

$$a_1 = \int_0^1 \tau d\tau = \frac{1}{2}$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left[f_n + \frac{1}{2}\Delta f_{n-1}\right]$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[3f_n - f_{n-1}]$$

que es el Método explícito de Adams-Beshforth de orden $k = 2$.
Y así, sucesivamente se pueden escribir los métodos de multipaso explícitos en diferencias retrógradas de orden k.
Ahora bien, si al construir el polinomio de interpolación indexamos el nodo t_{n+1} y tomamos la secuencia de nodos $t_{n+1}, t_n, t_{n-1}, \dots, t_{n-k}$ entonces

$$P_{k+1}(t_{n+1} - \tau h) = f_{n+1} - \tau\Delta f_n + \frac{\tau}{2!}\Delta^2 f_{n-1} + \dots\dots + (-1)^{k+1}\frac{\tau(\tau-1)(\tau-2)\dots(\tau-(k+1))}{(k+1)!}\Delta^{k+1} f_{n-k} \qquad (2.5)$$

donde ahora $\tau = \dfrac{t_{n+1} - t}{h}$

Sustituyendo (2.5) en (2.3) se obtendrá :

$$y_{n+1} = y_n + h[b_0 f_{n+1} + b_1 \Delta f_n + b_2 \Delta^2 f_{n-1} + \dots + b_{k+1}\Delta^{k+1} f_{n-k}]$$

donde los coeficientes b_i se calculan de manera análoga a los a_i y se podrá fácilmente obtener los métodos de multipaso implícitos y sus casos particulares :
<u>Método de Euler Implícito</u>:

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hf_{n+1}}$$

los métodos de Adams-Moulton de orden 2 ó 3 respectivamente :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f_{n+1} - f_n]$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}[5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}]$$

De manera general podemos escribir los métodos de Adams-Bashforth en términos de las diferencias retrógradas como:

$$y_n = y_{n-1} + h\sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \nabla^j f_{n-1} \qquad (2.6)$$

y los de Adams-Moulton como:

$$y_n = y_{n-1} + h\sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j^* \nabla^j f_n \qquad (2.7)$$

donde para diferentes órdenes los coeficientes γ_j y γ_j^* son los que se muestran en la tabla:

k	0	1	2	3	4	5
γ_k	1	$1/2$	$5/12$	$3/8$	$251/720$	$95/228$
γ_j^*	1	$-1/2$	$-1/12$	$-1/24$	$-19/720$	

Queda claro que del término del polinomio de interpolación que le sigue al tomado al aproximar la integral en (2.3) se puede estimar el error de cada método, tanto explicito como implícito.
Se puede demostrar que los métodos implícitos tienen errores menores y mayores regiones de estabilidad [4], pero mayor costo computacional que los explícitos.
Los errores de truncamiento de cada método son:

$$E_{AB} = \gamma_k h^{k+1} y^{(k+1)}$$

$$E_{AM} = \gamma_k^* h^{k+1} y^{(k+1)}$$

Es por ello que se construyen los esquemas de predictor corrector, por ejemplo para $k = 4$

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + \frac{h}{24}\left(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}\right)$$

$$y_{n+1}^{(m+1)} = y_n + \frac{h}{24}\left[55f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(m)}\right) + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}\right] \quad m = 0,1,2,\ldots\ldots$$

En [3] se demuestra que la representación de los métodos multipaso en diferencias retrógradas tienen la ventaja que originan menos operaciones por paso, es una representación conveniente para la estimación del error para cada paso y por último, los términos de la fórmula son cada vez más pequeños y se acumulan menos errores de redondeo.
Los métodos multipaso pueden ser descritos en una formulación mucho más general:

$$\frac{1}{h}\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n-j} - \sum_{j=0}^{k} \beta_j f\left(t_{n-j}, y_{n-j}\right) = 0 \qquad (2.8)$$

Según la formulación dada en [6] dependiendo de cómo se tomen los coeficientes α_j y β_j, así tendremos los diferentes métodos multipaso explícitos o implícitos.

3. LAS BDFs APLICADAS A EDAs.

Estudiemos el caso de las BDFs (backward difference formulae) aplicadas a EDAs de indice 0 y 1, puesto que estas son las implementadas en el código DASSL, es decir, de la forma:

$$F(t, y, y') = 0 \qquad (3.1)$$

$$y(t_0) = y_0 \qquad (3.2)$$

$$y'(t_0) = y_0' \qquad (3.3)$$

donde F, y, y' y $\frac{dy}{dt}$ son vectores de dimensión N.

La idea básica de Gear fue sustituir la derivada de la ecuacion (3.1) por una diferencia finita y resolver el sistema no lineal resultante en cada t_{n+1}, por el Metodo de Newton [1]

$$F\left(t_{n+1}, y_{n+1}, \frac{y_{n+1} - y_n}{h_{n+1}}\right) = 0 \qquad (3.4)$$

En este caso hemos sustituido la derivada y' por una fórmula en diferencias retrógradas de primer orden, o lo que es lo mismo, hemos usado el Método de Euler implicito, donde $h_{n+1} = t_{n+1} - t_n$
Los algoritmos implementados en DASSL [1], son una extensión de esta idea, lo que en lugar de usar un Euler implicito, se usan BDFs de orden k con $k = 1,2,\ldots,5$. En cada caso se escoge k segun el comportamiento de la solución.
El código DASSL usa BDFs con coeficiente dominante fijo. La solucion de (3.4) al avanzar de t_n a t_{n+1} se busca como la solución de un sistema de ecuaciones no lineales algebraicas para las incognitas y_{n+1}. En DASSL la solución se busca por el Método de Newton modificado, es decir, primeramente se evalua la matriz jacobiana

$$J = \frac{\partial F}{\partial y_{n+1}}$$

y esta se usa para calcular iterativamente soluciones de y_{n+1}, denotadas por y_{n+1}^i donde i es el indice de la iteración, el cual se calcula como

$$J\left(y_{n+1}^{i+1} - y_{n+1}^i\right) = -F\left(t_{n+1}, y_{n+1}, \frac{y_{n+1}^i - y_n}{t_{n+1} - t_n}\right) \qquad (3.5)$$

donde para $i = 0$ la y_{n+1}^0 se toma del paso del predictor.
Para obtener eficiencia computacional el Jacobiano se evalúa sólo periódicamente. DASSL monitorea la velocidad de convergencia y cuando ésta se hace lenta, entonces actualiza el Jacobiano.
Una vez que el proceso iterativo converge para un paso dado h_{n+1}, entonces se estima el error de truncamiento local y el código determina si continuar con ese paso, disminuirlo o aumentarlo. Por ejemplo, si el error nos dice que el paso era demasiado grande, entonces este se reduce y se repite el cálculo. Si se obtienen errores mucho mas pequeño que la tolerancia prefijada entonces el paso se incrementa.
El análisis teórico de la convergencia de las BDFs aplicados a EDAs, la manera en que se implementan los métodos de multipaso del predictor-corrector, asi como las estrategias de selección del paso y del orden del método están bien documentados en [1].
Cabe señalar que no existe una extensión inmediata de los métodos de multipaso en su formulacion general según la expresión (2.8) para una EDA completamente implícita como (3.1), debido a que estos métodos requieren evaluar combinaciones lineales de las derivadas $y'(t)$ en términos de t y y, los cuales no estan explícitos en cada paso.
La situación es un poco más sencilla en el caso de EDAs semi-explicitas del tipo:

$$y_1' = f\left(y_1^{(1)}, y_2^{(2)}, t\right) \qquad (3.6)$$

$$0 = g\left(y_1^{(1)}, y_2^{(2)}, t\right) \qquad (3.7)$$

En este caso la aplicación de (2.8) daría:

$$\frac{1}{h}\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y_{n-j}^{(1)} - \sum_{j=0}^{k} \beta_j f\left(y_{n-j}^{(1)}, y_{n-j}^{(2)}, t_{n-j}\right) = 0$$

$$g\left(y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, t_n\right) = 0$$

Aunque los métodos multipaso, o los métodos de Runge-Kutta implicitos han sido reportados en numerosos trabajos tales como [5], en la actualidad las formulas en diferencias retrógradas para EDAs generales de indice 1 son las mas utilizadas. El paquete LSODI [2] tambien está basado en las diferencias retrógradas

4. EDAs OBTENIDAS AL APLICAR EL METODO DE LINEAS A PROBLEMAS EN DERIVADAS PARCIALES

Los métodos numéricos clásicos de solución de ecuaciones en derivadas parciales (EPDs) requieren de la discretización por diferencias finitas o por elementos finitos de todas las derivadas. El método de Lineas propone discretizar todas las derivadas excepto una y así llevar el problema a la solución numérica o de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) o a un sistema de ecuaciones diferenciales-algebraicas (EDAs).

Existe una gran variedad de problemas de EPDs que, o de una manera natural se plantean como EDAs en derivadas parciales (como el ejemplo real ilustrado en este trabajo), o se plantean como EPDs y al ser discretizados por el Método Lineas se transforman en EDAs.

La aplicación del Método de Lineas tiene varias ventajas frente a otros métodos, a saber:

- Se pueden usar directamente todos los paquetes de programas existentes para EDOs o EDAs de valor inicial, tales como ODEPACK, LSODI, DASSL, con toda la eficiencia computacional como selección del paso, del orden del método, el control del error y la estabilidad.
- El Método de Lineas es por si mismo computacionalmente eficiente.
- La persona que usa el Método de Lineas para resolver EPDs, sólo tiene que discretizar las variables elegidas y utilizar un software standard.

Para ilustrar de una manera sencilla el Método de Lineas tomemos la ecuación parabólica de conducción del calor:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad 0 \le x \le 1, \quad t \ge 0$$

$$y(0,x) = \mu(x)$$
$$y(t,0) = \alpha(t)$$
$$y(t,1) = \beta(t)$$

Discretizando la derivada espacial $t_n = n\Delta t$ y denotando $y(t,x_n) = y_n(t)$ obtenemos el sistema de $N+1$ EDAs

$$\frac{dy_n(t)}{dt} = \frac{y_{n+1}(t) - 2y_n(t) + y_{n-1}(t)}{(\Delta x)^2}, \qquad n = 1,2,\ldots,N-1$$
$$0 = y_o(t) - \alpha(t)$$
$$0 = y_n(t) - \beta(t)$$

con las $N+1$ condiciones iniciales

$$y_i(0) = \mu(i\Delta x), \qquad i = 0,1,\ldots\ldots,N$$

Este problema tiene solución exacta y es un test para el código DASSL que ilustra muy bien la eficiencia computacional al resolver EPDs mediante el enfoque de las EDAs.

5. UN EJEMPLO PRACTICO DE LA INGENIERIA CIVIL

Para el cálculo y diseño de estructuras laminares, en particular para el diseño de Cimentaciones laminares de revolución, así como para el diseño de depósitos laminares elevados son bien conocidos en el ISPJAE los trabajos del Prof. Dr. Pimpo Hernández.

El modelo matemático adimensional que rige el caso del cálculo de un cimiento trunco-conico con carga axial simetrica y en coordenadas cilindricas es el siguiente

$$\frac{\partial N_1}{\partial \rho} + \frac{N_1 - N_2}{\rho} + \frac{\partial S}{\rho \partial \theta} = 0 \qquad (5.1)$$

$$\frac{\partial N_2}{\rho \partial \theta} + \frac{\partial S}{\partial \rho} + 2\frac{S}{\rho} = 0 \qquad (5.2)$$

$$f_{\rho\rho} N_1 - \frac{f_\rho}{\rho} N_2 + q_n = 0 \qquad (5.3)$$

para $0.25 \le \rho \le 1$, $\quad 0 \le \theta \le 2\pi$ y donde las incógnitas N_1, N_2 y S son las acciones interiores y los datos conocidos son:

f_ρ y $f_{\rho\rho}$ las primeras y segundas derivadas de la ecuación de la superficie media de la lámina

$f = f(\rho,\theta)$

q_n la carga axial simétrica.

Como se puede ver el modelo de una manera natural es un sistema de 2 ecuaciones diferenciales parciales y una algebraica.

Las condiciones de contorno y de periodicidad (por ser una superficie en revolución) son:

$$N_1(1,\theta) = 0, \qquad S(1,\theta) = 0 \qquad (5.4)$$
$$N_1(\rho,0) = N_1(\rho,2\pi) = 0 \qquad (5.5)$$
$$N_2(\rho,0) = N_2(\rho,2\pi) \qquad (5.6)$$
$$S(\rho,0) = S(\rho,2\pi) = 0 \qquad (5.7)$$

Aplicando el Método de Lineas, se discretizaron las derivadas respecto a θ con $\theta_i = i\Delta\theta$, $\Delta\theta = \frac{2\pi}{M}$

$$\frac{\partial S}{\partial \theta}(\rho,\theta_i) \approx \frac{S^i - S^{i-1}}{\Delta\theta}$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \theta}(\rho,\theta_i) \approx \frac{N_2^i - N_2^{i-1}}{\Delta\theta}$$

y se transformó el problema de EDPs original (5.1)-(5.3) al sistema semi-explícito

$$Y'(\rho) = F(\rho)Y$$
$$0 = G(Y,\rho)$$

con condiciones iniciales $Y(\rho = 1) = Y_0$ donde

$$Y(\rho) = \left[N_1^0, N_1^1, \ldots\ldots, N_1^M, S^0, S^1, \ldots\ldots, S^M, N_2^0, N_2^1, \ldots\ldots, N_2^M\right]^T$$

Antes de hacer el cálculo con DASSL se comprobaron las condiciones iniciales para $Y(\rho = 1)$ y $Y'(\rho = 1)$. Para este ejemplo específico, las soluciones analiticas son conocidas:

$$N_1(\rho) = -\frac{3}{4\rho}(\rho^2 - 1)$$

$$S(\rho) = 0$$

$$N_2(\rho) = -\frac{3}{2}\rho$$

Los resultados numéricos se obtuvieron con valores del error relativo de 0.E-6 y del error absoluto de 0.E-10 y concordaron con las soluciones analíticas.

La siguiente tabla muestra la solución numérica obtenida:

p	N_1	N_2	S
0.25	2.821250	-0.374999	0.0
0.325	2.063946	-0.487499	0.0
0.4	1.575002	-0.599999	0.0
0.475	1.226986	-0.712499	0.0
0.55	0.951137	-0.883241	0.0
0.625	0.731250	-0.937499	0.0
0.70	0.546428	-1.049999	0.0
0.775	0.386492	-1.162499	0.0
0.85	0.244852	-1.274999	0.0
0.925	0.117060	-1.387499	0.0
1.00	0.0	-1.5	0.0

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el desarrollo de este trabajo hemos arribado a las siguientes conclusiones:

- Las fórmulas en diferencias retrógradas constituyen la vía numérica ideal para la solución de EDAs con valores iniciales.
- Se abren grandes perspectivas de investigación en el uso del Método de Líneas para transformar EPDs en EDOs ó EDAs y aplicar entonces software eficientes.
- Los problemas de diseño y cálculo de Estructuras Laminares en Ingeniería Civil constituyen una fuente inagotable de EDAs en ecuaciones ordinarias así como en EPDs.

Los autores nos proponemos continuar trabajando en el Método de Líneas para EPDs en problemas de cálculo de Estructuras, los problemas que deban trabajarse como EDAs con valores en la frontera, enfocarlos con el COLDAEM y diseñar y desarrollar un Software que resuelva de manera completa el problema del cálculo de estructuras laminares.

AGRADECIMIENTOS

Al Profesor Dr. Pimpo Hernández por el planteamiento del problema real.

BIBLIOGRAFIA

[1] Brenan K. E., Campbell S. L., Petzold L. R., Numerical Solution of Initial-Value Problem in Differential-Algebraic Equations. Elsevier Science Publishing Co., 1989.

[2] Hindmarsh A. C., ODE solvers for use with the method of lines. Advanced in Comp. Methods for PDE. IV eds IMACS, New Brunswick, N. J. pp 312-316.

[3] Gear C. W., The simultaneous numerical solution of differential/algebraic equations. IEEE Trans. on Circuit Theory, CT-18, pp 89-95.

[4] Gómez A., Alvarez L., Métodos numéricos del análisis matemático. Editorial Academia. La Habana, 1990.

[5] Griepentrog E., Hanke M., Marz R., Toward a better understanding of differential algebraic equations Fachbereich Matematik. Germany, 1990

[6] Sanz-Serna J. M., Convergence analysis of one step schemes in the method of lines Applied Mathematics and Computation, 31 pp 183-195

[7] Swillinger D., Handbook of differential equations Academic Press 1989

RELATÓRIOS DE PESQUISA — 1997

01/97 **Solving Complementarity Problems by Means of a New Smooth Constrained Nonlinear Solver** - *Roberto Andreani* and *José Mario Martínez*.

02/97 **Riemannian Submersions of Open Manifolds which are Flat at Infinity** — *Valery Marenich*.

03/97 **Comparing the Numerical Performance of Two Trust-Region Algorithms for Large-Scale Bound-Constrained Minimization** - *Maria A. Diniz-Ehrhardt, Márcia A. Gomes-Ruggiero* and *Sandra A. Santos*.

04/97 **Finsler spcaes with constant flag curvature** — *Xiaohuan Mo*.

05/97 **Symmetric Singularities of Reversible Vector Fields in Dimension Three** — *João Carlos da Rocha Medrado* and *Marco Antonio Teixeira*.

06/97 **Nonsmooth Nonconvex Alternative Theorem and Applications** — *A. J. V. Brandão* and *M. A. Rojas-Medar*.

07/97 **On the Klein-Gordon and Dirac Equations** — *E.A. Notte Cuello* and *E. Capelas de Oliveira*.

08/97 **Augmented Lagrangians and Sphere Packing Problems** — *José Mario Martínez*.

09/97 **História da Tangente** — *Eduardo Sebastiani Ferreira*.

10/97 **Exact Penalty Methods With Constrained Subproblems** — *Sílvia M. H. Janesch* and *Lúcio Tunes Santos*.

11/97 **Relato de Experiência: O Computador no Ensino de Cálculo, O Problema do Lixo na Unicamp e Outras Aplicações** — *Vera L. X. Figueiredo* e *Sandra A. Santos*.

12/97 **Harmonic Sequences of Harmonic 2-Spheres in Grassmann Manifolds** — *Xiaohuan Mo* and *Caio J. C. Negreiros*.

13/97 **Open Problems on Regularization of Discontinuous Vector Fields** — *Marco Antonio Teixeira*.

14/97 **Can the Klein-Gordon Equation Describe Superluminal Processes ?** — *J. E. Maiorino*.

15/97 **Nonsmooth Continuous-Time Optimization Problems: Sufficient Conditions** — *Marko A. Rojas-Medar, Adilson J. Vieira-Brand ao* and *Geraldo N. Silva*.

16/97 **The Symmetric Tensor Product of a Direct Sum of Locally Convex Spaces** — *José M. Ansemil* and *Klaus Floret*.

17/97 **Optimality Conditions for Pareto Nonsmooth Nonconvex Programming in a Banach Spaces** — *A. J. V. Brandão, M. A. Rojas-Medar* and *G. N. Silva*.

18/97 **Pontrjagin Classes and the Homology of an Orientable Manifold** — *Ricardo N. Cruz*.

19/97 **Weierstrass Formula for Minimal Surfaces in Heisenberg Group** — *Christiam B. Figueroa*.

20/97 **On the Global Convergence of Newton-Like Methods for Nonsmooth Systems** — *Márcia A. Gomes-Ruggiero, Vera Lúcia Rocha Lopes* and *José Mario Martínez*.

21/97 **The Retrieval of the Optical Constants and the Thickness of thin Films from Transmission Spectra** — *I. Chambouleyron, J. M. Martínez, A. C. Moretti* and *M. Mulato*.

22/97 **Generic Bifurcation of Reversible Vector Fields on a 2-Dimensional Manifold** — *Marco Antonio Teixeira*.

23/97 **On the Convergence Rate for an Iterational Method for the Equations of Nonhomogeneous Incompressible Fluids** — *Elva E. Ortega-Torres* and *Marko A. Rojas-Medar*.

24/97 **Some Results on Partitions with Difference Conditions** — *José Plinio O. Santos* and *Paulo Mondek*.

25/97 **Sobre o Cálculo dos Índices de Ramificação** — *Caio J. C. Negreiros*.

26/97 **Homogeneous Spaces Admitting Transitive Semigroups** — *Luiz A. B. San Martin*.

27/97 **A Unified Born-Kirchhoff Approximation for Acoustic Media** — *Maria A. Novais, Lucio T. Santos, Martin Tygel* and *Bjorn Ursin*.

28/97 **2.5D True-Amplitude Offset Continuation** — *Lucio T. Santos, Jörg Schleicher* and *Martin Tygel.*

29/97 **2.5D True-Amplitude Migration and Demigration** — *João L. Martins, Jörg Schleicher* and *Martin Tygel.*

30/97 **On a Generalized Mean Curvature Problem** — *Sebastián A. Lorca* and *Pedro Ubilla.*

31/97 **Solution of contact problems using subroutine BOX-QUACAN** — *Z. Dostál, A. Friedlander* and *Sandra A. Santos.*

32/97 **A Family of Partitions Identities** — *José Plinio O. Santos* and *Paulo Mondek.*

33/97 **On Global Extrema for Calculus and Analysis Students** — *Ricardo N. Cruz.*

34/97 **Launching of Non-Dispersive Superluminal Beams** — *V. S. Barashenkov* and *Waldyr A. Rodrigues Jr.*

35/97 **Integrality Results for Pontrjagin Classes and the Homology of Manifolds** — *Ricardo N. Cruz.*

36/97 **Quaternionic Quantum Mechanics: From Complex to Complexified Quaternions** — *Stefano De Leo* and *Waldyr A. Rodrigues Jr.*

37/97 **Hypercomplex Group Theory** — *Stefano De Leo.*

38/97 **Local Hypercomplex Analiticity** — *Stefano De Leo* and *Pietro Rotelli.*

39/97 **A New Definition of Hypercomplex Analiticity** — *Stefano De Leo* and *Pietro Rotelli.*

40/97 **A Multiplicative Seasonal Growth for Multivariate Time Series Analysis and Forescating** — *Emanuel Pimentel Barbosa* and *Regina Sadownik.*

41/97 **Um Processo de Newton para Encontrar a Tangente à uma Cônica** — *Eduardo Sebastiani.*

42/97 **The Equations of a Viscous Asymmetric Fluids: An Iterational Approach** — *Elva E. Ortega-Torres* and *Marko A. Rojas-Medar.*

43/97 **Ten Years of General Statistical Analysis. (The main G-estimators of general statistical analysis)** — *V. Girko.*

44/97 **On a System of Evolution Equations of Magnetohydrodynamic Type: An Iterational Approach** — *E. A. Notte-Cuello* and *Marko A. Rojas-Medar.*

45/97 **A Mathematical Model for Pathogenics Fungi growth and the Effects of Alernating and Mixing Fungicide** — *Laércio Luis Vendite* and *Claudia Galarda Varassin.*

46/97 **Simple Proof of the Strong Circular Law** — *V. L. Girko.*

47/97 **Order and Domains of Attraction of Control Sets in Flag Manifolds** — *Luiz A. B. San Martin.*

48/97 **Kähler-Einstein Metrics** — *Yuri Bozhkov.*

49/97 **On the local convergence of quasi-newton methods for nonlinear complementarity problems** - *Vera Lúcia Rocha Lopes, José Mario Martínez* and *Rosana Pérez.*