3915

RELATÓRIO DE PESQUISA

RT - BIMECC
3333

POR QUE M-VARIEDADES SÃO M-SUPERFÍCIES?

Ricardo N. Cruz

Janeiro RP 02/96

INSTITUTO DE MATEMÁTICA
ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

ABSTRACT – Mostraremos que m-variedades são m-superfícies (m-subvariedades M^m do $\mathbb{R}^n$, para algum n (o menor n é denotado por $n(M)$)). Para isso, utilizaremos o teorema de Whitney para m-superfícies M^m ([GP] p. 51), que diz que $n(M) \leq 2m+1$. Como consequencia provaremos o teorema de Whitney que diz que uma m-variedade é mergulhável em $\mathbb{R}^{2m+1}$.

IMECC – UNICAMP
Universidade Estadual de Campinas
CP 6065
13081-970 Campinas SP
Brasil

O conteúdo do presente Relatório de Pesquisa é de única responsabilidade do(s) autor(es).

Janeiro 1996

Por que m-variedades são m-superfícies?

Ricardo N. Cruz

Mostraremos que m-variedades são m-superfícies (m-subvariedades M^m do $\mathbb{R}^n$, para algum n (o menor n é denotado por $n(M)$)). Para isso, utilizaremos o teorema de Whitney para m-superfícies M^m ([GP] p. 51), que diz que $n(M) \leq 2m+1$. Como consequência provaremos o teorema de Whitney que diz que uma m-variedade é mergulhável em $\mathbb{R}^{2m+1}$.

1. Introdução.

O teorema de Whitney afirma que uma variedade diferenciável M^m é mergulhavel em $\mathbb{R}^{2m+1}$.

Seja M^m uma variedade diferenciável. Temos um mergulho $M \subset MU_{\partial M}M$ (o dobro de M, uma variedade sem bordo). Portanto, para provarmos o Teorema de Whitney, podemos assumir $\partial M = \phi$. Além disso podemos assumir M conexa pela seguinte razão: Como M^m tem uma base no máximo enumerável para a sua topologia, M^m tem uma quantidade no máximo enumerável de componentes conexas $M_1, M_2, \ldots$. Compondo mergulhos $M_1 \to \mathbb{R}^{2m+1}, M_2 \to \mathbb{R}^{2m+1}, \ldots$ com os difeomorfismos

$$x \in \mathbb{R}^{2m+1} \longmapsto i + \frac{x/4}{1+||x||^2} \in B_{\frac{1}{4}}(i), i = 1, 2 \ldots$$

onde $B_{1/4}(i) = \{x \in \mathbb{R}^{2m+1} | ||x - i|| < \frac{1}{4}\}$, obtemos mergulhos $f_i : M_i \to B_{1/4}(i), i = 1, 2, \ldots$.

Defina $f : M \to \mathbb{R}^{2m+1}$ por $f = \sum_i f_i$. Esta função é um mergulho.

Daqui em diante, só consideraremos variedades diferenciáveis sem bordo e conexas.

A vantagem deste enfoque é que com os fatos mais elementares sobre variedades diferenciáveis, acrescidos do material usual: "partições da unidade", podemos provar que m-variedades diferenciáveis são, de fato, m-superfícies.

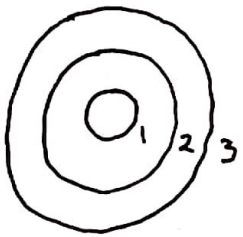
2. O Teorema de Whitney.

2.1 O teorema de Whitney. M^m variedade diferenciável conexa. Existe um mergulho $M^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ e uma imersão própria $M^m \looparrowright \mathbb{R}^{2m}$.

Antes de provar o teorema, precisamos de uns fatos preliminares.

2.2 Proposição. M^m variedade diferenciável, $\phi \neq K \subset M, K$ compacto. Então existe um inteiro positivo n, uma função diferenciável $f : U \to \mathbb{R}^n, U$ um aberto, $U \supset K$ tal que f é um mergulho.

Demonstração. Seja $x \in M$. Existe uma carta local (U_x, φ_x) com $x \in U_x$, aberto em $M, \varphi_x : U_x \to \mathbb{R}^m$. Além disso $\varphi_x(U_x) = B_3(0), \varphi_x(x) = 0$.



Seja $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ([L] Cap. 8) tal que $0 \leq \psi \leq 1, \psi^{-1}(1) = \overline{B_1(0)}, \psi^{-1}(0) = B_2^c(0)$. Defina $g_x : M \to \mathbb{R}^m$ por

$$g_x(y) = \begin{cases} \psi(\varphi_x(y))\varphi_x(y) & , y \in U_x \\ 0 & , y \notin U_x \end{cases}$$

Ponha $V_x = \varphi_x^{-1}(B_1(0))$. Tome $\overline{f} = (g_x, \theta_x) : M \to \mathbb{R}^{m+1}$ onde $\theta_x : M \to \mathbb{R}$ é dada por

$$\theta_x(y) = \begin{cases} 1 - \psi(\varphi_x(y)) & , y \in U_x \\ 1 & , y \notin U_x \end{cases}$$

temos que $\theta_x \geq 0$ e $\theta_x^{-1}(0)\overline{V}_x$ (vide [L] Cap. 8)

Por compacidade é possível cobrir K por um número finito de V_x's como acima, digamos $V_1, \ldots, V_k$. Ponha $U = \bigcup_i V_i$. Defina $\overline{f} : M \to \mathbb{R}^{k(m+1)}$ por $\overline{f} = (\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_k)$. $\overline{f}|_U$ é uma imersão injetiva. Vejamos porque:

posto $\overline{f}|_U \geq$ posto $(\overline{f}_i|_{V_i})$ para todo i. Como $\overline{f}_i|_{V_i}$ é uma imersão para todo $i, \overline{f}|_U$ é imersão.

Temos: $\overline{f}_i$ separa $\overline{V}_i$ de $M^m \backslash \overline{V}_i$ ou seja $\overline{f}_i(\overline{V}_i) \cap \overline{f}_i(M^m \backslash \overline{V}_i) = \phi$, para todo i. Segue-se que $\overline{f}|_U$ é injetiva.

Finalmente pondo $f = (\overline{f}|U, \rho)$ onde $\rho : U \to \mathbb{R}$ é própria ([GP] p. 53, a demonstração vale para m-variedades) obtemos um mergulho $f : U \to \mathbb{R}^n, n = k(m+1)+1, U \supset K$.

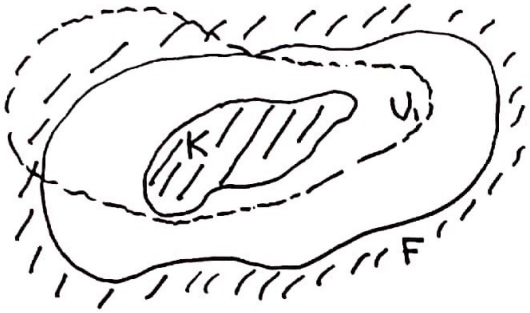
A idéia é globalizar via compacidade o fato de que localmente uma m-variedade diferenciável é uma m-superfície.

2.3 Corolário. Se M^m é compacta então existe um mergulho $M^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$.

Demonstração. Neste caso, tomando $K = M$ na proposição anterior, segue-se que M é difeomorfa a uma m-superfície. O teorema de Whitney para m-superfícies ([GP] p.51) termina a demonstração.

2.4 Proposição. M^m variedade diferenciável. K, F fechados disjuntos e não vazios de M. K compacto. Então existem abertos disjuntos $U, V, U \supset K, V \supset F$ e $f : M^m \to \mathbb{R}^{2m+1}$ diferenciável tal que $f|_V = 0$ e $f|_U$ é um mergulho.

Demonstração. Pela proposição 2.2 existe $U_1 \supset K$ aberto e um mergulho diferenciável $g : U_1 \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, para algum n. Utilizando ([GP] p. 51) podemos assumir $n = 2m+1$.



Como M^m é normal, os fechados disjuntos $K, F \cup U_1^c$ podem ser separados por abertos disjuntos U_2, V_2 respecitvamente.

Ponha $F_1 = \overline{V}_2$. Temos: $\partial F_1 \subset U_1$. Pelo lema de Urysohn diferencíavel ([L] Cap.8), existe uma função diferenciável $\varphi : M \to \mathbb{R}$ tal que $\text{int}\varphi^{-1}(1) \supset K$, $\text{int}\varphi^{-1}(0) \supset F_1$. Defina $f : M \to \mathbb{R}^{2m+1}$ por

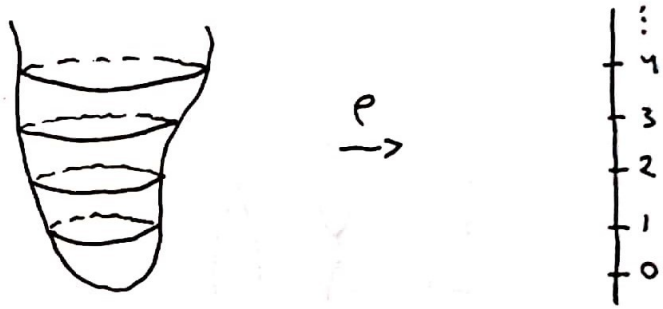
$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x)g(x) & , x \in U_1 \\ 0 & , x \notin U_1 \end{cases}$$

Ponha $U = U_1 \cap \text{int } \varphi^{-1}(1), V = \text{int } \varphi^{-1}(0)$.

2.5 Lemma. M^m variedade diferenciável não compacta. Então existe uma função $\rho : M \to \mathbb{R}$ que é própria e diferenciável. Além disso $Im(\rho) = [0, \infty)$.

Demonstração. Por ([L] Cap. 8) uma tal ρ existe, exceto pelo fato de não sabermos quem é $Im(\rho)$. Compondo ρ com a função $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in [0, \infty)$ se necessário podemos assumir ρ não negativa. Como M é conexa $Im(\rho)$ é um intervalo. Além disso por ser ρ própria $Im(\rho)$ é fechado em $\mathbb{R}$. Assim $Im(\rho) = [a, \infty), a \in \mathbb{R}$. Compondo ρ com uma translação de $\mathbb{R}$, se necessário podemos assumir $a = 0$.

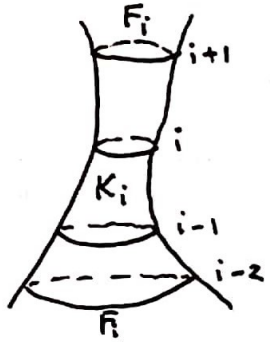
2.6 Teorema. M^m variedade diferenciável não compacta. Então existe um mergulho $M^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$.



Demonstração. Seja ρ a função dada pelo lema 2.5.

Defina $K_i = p^{-1}[i-1, i], i \geq 1$. Como ρ é própria, K_i é compacto para todo i.

Seja $F_i = \bigcup_{j \neq i \pm 1, i} K_j = \rho^{-1}((-\infty, i-2] \cap [i+1, \infty))$

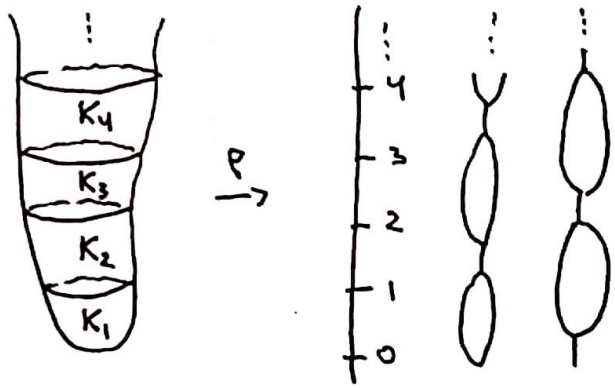


Aplicando a proposição 2.4 a (K_i, F_i) obtemos $g_i : M \to \mathbb{R}^{2m+1}$, para todo $i \geq 1$.

Defina $f_1, f_2 : M \to \mathbb{R}^{2m+2}$ por

$$\begin{cases} f_1 = \left(\sum_{i \text{ ímpar}} g_i \rho \right) \\ f_2 = \left(\sum_{i \text{ par}} g_i \rho \right) \end{cases}$$

Temos: $(f_1, f_2) : M \hookrightarrow \mathbb{R}^{4(m+1)}$ é um mergulho.



Assim, M é difeomorfa a uma m-superfície. Pelo teorema de Whitney para superfícies ([GP] p.51), segue-se que existe um megulho $M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$.

2.7 Observação. M^m variedade diferenciável. Se raciocinarmos como nas p. 51,54 [GP] sem usar a função h(notação de [GP]) segue-se que podemos obter uma imersão $M^m \looparrowright \mathbb{R}^{2m}$.

Demonstração do Teorema 2.1. Imediata a partir do anteriormente feito. ∎

IMECC/UNICAMP
Campinas, SP, CEP 13081-970

Referências

[GP] V. Guillemin & A. Pollack: Diferential Topology. Prentice-Hall. 1974.

[L] Elon L. Lima: Variedades Diferenciáveis. Monografias de Matemática nº 15. IMPA. 1973.

RELATÓRIOS DE PESQUISA — 1996

01/96 **Stable Size Distribution in a Mathematical Model for a Tumor Cell Population Growth Under Chemotherapeutic Treatment with Two Non-Cross Resistant Drugs** – *Hamilton F. Leckar* and *Laércio L. Vendite.*