RELATÓRIO DE PESQUISA

O GRUPO DAS ROTAÇÕES COM DEZ PARÂMETROS

G. C. Ducati

E. Capelas de Oliveira

and

G. Arcidiacono

Março RP 17/96

INSTITUTO DE MATEMÁTICA
ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

ABSTRACT - No presente trabalho apresentamos os grupos das rotações com dez parametros e como aplicações à física discutimos os grupos de Galileu, Poincaré e Fantappié-de Sitter associados, respectivamente, aos cronotopos de Newton, da Física Clássica, de Minkowski, da Relatividade Especial e de Castelnuovo, da Relatividade Projetiva.

IMECC - UNICAMP
Universidade Estadual de Campinas
CP 6065
13081-970 Campinas SP
Brasil

Março - 1995

O Grupo das Rotações com Dez Parâmetros

G. C. Ducati
Departamento de Matemática Aplicada
IMECC - UNICAMP
13081-970 Campinas (SP) Brasil
e
E. Capelas de Oliveira [1]
Dipartimento di Matematica
Università di Perugia
06123 Perugia (PG) Italia
e INFN - Sezione di Milano (MI) Italia
e
G. Arcidiacono
Dipartimento di Matematica
Università di Perugia
06123 Perugia (PG) Italia

Resumo

No presente trabalho apresentamos os grupos das rotações com dez parâmetros e como aplicações à física discutimos os grupos de Galileu, Poincaré e Fantappié-de Sitter associados, respectivamente, aos cronotopos de Newton, da Física Clássica; de Minkowski, da Relatividade Especial e de Castelnuovo, da Relatividade Projetiva.

[1]Em afastamento do Departamento de Matemática Aplicada, IMECC-UNICAMP, 13081-970 Campinas,(SP) Brasil

I. Introdução

A noção de grupo apareceu a partir do estudo de problemas acerca da resolução de equações algébricas e manifestou toda a sua eficácia com os trabalhos pioneiros de Galois[1,2].

A partir de então, estendeu-se o conceito de grupo em duas direções, ou seja: passando-se dos grupos que contém um número finito de operações (*Grupos Finitos*) aos grupos com operações infinitas porém discretas (*Grupos Infinitos*) e, por outro lado, a partir da passagem do discreto ao contínuo, estendendo-se a grupos de operações (transformações) que dependem de parâmetros sucetíveis de variar em maneira contínua. Este segundo modo é devido a obra de Lie[3,4].

Neste trabalho, estaremos interessados em estudar os grupos das rotações, ainda mais, os grupos de rotações com dez parâmetros, devido a sua ampla aplicação, em problemas advindos da física, como por exemplo, dentre tantos, na Teoria dos Universos Físicos proposta por Fantappié[5].

Em relação aos grupos com dez parâmetros podemos citar, em Física Clássica, o Grupo de Galileu, denotado por $\mathcal{G}^{10}_{3+1}$; em Física Relativista, o grupo de Poincaré, denotado por $\mathcal{P}^{10}_{3+1}$, da Relatividade Especial e o grupo de Fantappié-de Sitter, denotado por $\mathcal{F}^{10}_{3+1}$, da Relatividade Projetiva , o qual contém, como casos limites, os grupos de Galileu e de Poincaré.

Passando à física, temos que: o Grupo de Galileu, formado pelas rotações espaciais, $R(3)$, com três parâmetros; pelos deslocamentos inerciais, $V(3)$, com três parâmetros; pelas translações espaciais, $T(3)$, também com três parâmetros e pelas translações temporais, $T_0(1)$, com um parâmetro, descreve por completo o chamado cronotopo de Newton. Passando ao grupo de Poincaré, da Relatividade Especial, as rotações espaciais e os deslocamentos inerciais se fundem nas rotações do cronotopo, $R(6)$, com seis parâmetros e as translações espaciais e temporais se fundem nas translações do cronotopo, $T(4)$, com quatro parâmetros, o qual descreve o cronotopo de Minkowski. Nesta fusão emerge uma constante universal c, chamada velocidade da luz. O grupo de Fantappié-de Sitter, que descreve o chamado cronotopo de Castelnuovo, funde as translações e as rotações do cronotopo nas rotações do espaço a cinco dimensões, $R(10)$, com dez parâmetros, a partir de uma outra constante r, chamada raio do cronotopo.

Como uma aplicação efetiva dos grupos acima descritos, discutimos a chamada equação da *propagação das ondas*, ou ainda a equação de d'Alembert[6] que está associada a um cronotopo. Discutiremos tal equação associada ao cronotopo de Castelnuovo a qual coloca em evidência que todo cone de luz, relativo a tal cronotopo, é de abertura variável bem como, no limite, quando o raio do cronotopo tende ao infinito, recuperamos o cone de luz da Relatividade Especial com abertura fixa.

O presente trabalho está disposto na seguinte maneira: na seção II discutimos as transformações finitas do grupo das rotações com dez parâmetros bem como construimos a forma explícita dos invariantes associados a tais grupos. Na seção III, discutimos a equação de d'Alembert associada ao grupo de Fantappié-de Sitter bem como os seus casos limites e, finalmente, apresentamos as nossas conclusões.

II. Grupo das Rotações

As transformações finitas do grupo das rotações em um espaço S_n, podem ser construídas a partir de uma matriz antisimétrica $\mathcal{A}$, de ordem n, no seguinte modo:

$$X' = e^{\mathcal{A}}X$$

onde os $n(n-1)/2$ elementos distintos da matriz $\mathcal{A}$ são considerados como parâmetros canônicos ortogonais da transformação.

Em nosso caso, a determinação das transformações finitas, em parâmetros canônicos ortogonais, se reduz a calcular a função de matriz $\mathcal{A}$, com $\mathcal{A}$ uma matriz antisimétrica de ordem três, quatro e cinco.

Então, sendo K uma matriz quadrada qualquer de ordem n, a função $g(K)$ pode ser sempre escrita na forma de um polinômio (e série) nas potências de K, isto é:

$$g(K) = g_0 I + g_1 K + \cdots + g_{n-1} K^{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} g_j K^j$$

onde I é a matriz identidade de ordem n.

Fantappié, utilizando a sua teoria dos funcionais analíticos[7] obteve uma fórmula que permite calcular os coeficientes g_j a partir da equação característica da matriz K e das suas raízes características. É interessante observar que o desenvolvimento em série acima, não é muito vantajoso, porque as potências de K, não apenas o expoente cresce, tornam-se matrizes com elementos muito complicados.

Por outro lado, segundo a metodologia proposta por Arcidiacono, podemos escrever uma função de matriz, $g(K)$, em termos de uma combinação linear de certas matrizes Γ_i, construídas a partir dos complementos algébricos da matriz $K - \alpha I$, ou seja com um desenvolvimento do seguinte tipo:

$$g(K) = h_0\Gamma_0 + h_1\Gamma_1 + \cdots + h_{n-1}\Gamma_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} h_i\Gamma_i$$

onde as matrizes Γ_i, ao contrário das matrizes K^j, são mais simples e os coeficientes h_i resultam mais convenientes do que os correspondentes g_j. Então, passemos a construir tais matrizes.

Observando-se que o produto de uma matriz pela transposta de sua adjunta é igual ao produto $D(\alpha)I$, isto é:

$$(K - \alpha I)\Gamma = D(\alpha)I$$

onde $D(\alpha)$ é o determinante associado a matriz $K - \alpha I$, obtém-se a seguinte relação entre as matrizes Γ e K, ou seja uma relação de recorrência

$$\Gamma_{i+1} = b_{i+1}I - K\Gamma_i$$

onde b_i são os coeficientes do polinômio $D(\alpha)$.

Podemos mostrar[8] que $\Gamma_0 = I$ e, para uma matriz K antisimétrica temos $b_{2i+1} = 0$, de onde obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= I \\
-\Gamma_1 &= K \\
\Gamma_2 &= K^2 + b_2 I \\
-\Gamma_3 &= K^3 + b_2 K \\
\Gamma_4 &= K^4 + b_2 K^2 + b_4 I \\
\vdots\ &\ \vdots\ \ \vdots
\end{aligned}$$

Então, a partir das expressões acima basta substituir na expansão de $g(K)$ para obter e^K como um polinômio nas potências K^i e vice-versa.

Como um cálculo efetivo, discutimos as transformações do grupo das rotações do espaço S_5. Considerando-se r_i, v_i, t_i e t_0 com i=1,2,3, como sendo os dez parâmetros canônicos ortogonais do grupo de Fantappié-de Sitter, a

matriz infinitésima é dada por

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -v_1 & -v_2 & -v_3 & -t_0 \\ v_1 & 0 & r_3 & -r_2 & -t_1 \\ v_2 & -r_3 & 0 & r_1 & -t_2 \\ v_3 & r_2 & -r_1 & 0 & -t_3 \\ t_0 & t_1 & t_2 & t_3 & 0 \end{pmatrix}$$

A equação característica associada a esta matriz é

$$D(\alpha) = -\alpha^5 - b_2\alpha^3 - b_4\alpha = 0$$

onde os coeficientes b_2 e b_4 são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned}
b_2 &= \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{t}\cdot\mathbf{t} + t_0^2 \\
b_4 &= (\mathbf{v}\cdot\mathbf{r})^2 + (\mathbf{t}\cdot\mathbf{r})^2 + (t_0\mathbf{r} + \mathbf{t}\times\mathbf{v})^2
\end{aligned}$$

os quais constituem os dois invariantes associados ao grupo.

A partir da solução da equação característica, isto é utilizando as raízes características, podemos escrever

$$e^F = h_0\Gamma_0 + h_1\Gamma_1 + h_2\Gamma_2 + h_3\Gamma_3 + h_4\Gamma_4$$

onde os coeficientes h_i são dados por[8]

$$\begin{aligned}
(\rho^2 - \rho'^2)h_0 &= \rho^2 cos\rho - \rho'^2 cos\rho' \\
(\rho^2 - \rho'^2)h_1 &= \rho sen\rho - \rho' sen\rho' \\
(\rho^2 - \rho'^2)h_2 &= cos\rho' - cos\rho \\
(\rho^2 - \rho'^2)h_3 &= \frac{sen\rho'}{\rho'} - \frac{sen\rho}{\rho} \\
(\rho^2 - \rho'^2)h_4 &= \frac{cos\rho - 1}{\rho^2} + \frac{1 - cos\rho'}{\rho'^2}
\end{aligned}$$

com ρ e ρ' são reais e estão associados com as raízes características.

Usando as matrizes Γ_i no desenvolvimento de e^F tem-se a vantagem de que as matrizes Γ_i são muito mais simples que as matrizes F^i (potências da matriz F). Então, após efetuados os cálculos obtemos

$$\Gamma_0 = I \qquad \Gamma_1 = -F$$

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{t}\cdot\mathbf{t}+\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} & a_1 & a_2 & a_3 & \mathbf{v}\cdot\mathbf{t} \\ a_1 & p_{11} & p_{12} & p_{13} & b_1 \\ a_2 & p_{21} & p_{22} & p_{23} & b_2 \\ a_3 & p_{31} & p_{32} & p_{33} & b_3 \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{t} & b_1 & b_2 & b_3 & \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} \end{pmatrix}$$

onde os coeficientes da matriz são dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= -(t_o\mathbf{t}+\mathbf{r}\times\mathbf{v}) \\ \mathbf{b} &= -(t_0\mathbf{v}+\mathbf{r}\times\mathbf{t} \\ p_{ij} &= (\mathbf{t}\cdot\mathbf{t}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+t_0^2)\delta_{ij} - v_iv_j - t_it_j + r_ir_j \end{aligned}$$

Para escrever as outras duas matrizes Γ_3 e Γ_4, introduzimos a seguinte notação:

$$\begin{aligned} \overline{y}_0 &= -\mathbf{r}\cdot\mathbf{t} \\ \mathbf{y} &= t_0\mathbf{r}+\mathbf{t}\times\mathbf{v} \\ \overline{y}_4 &= -\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} \\ \mathbf{c} &= -\overline{y}_4\mathbf{r}+\mathbf{y}\times\mathbf{t} \\ \mathbf{d} &= \overline{y}_0\mathbf{r}+\mathbf{y}\times\mathbf{v} \\ \mathbf{e} &= -t_0\mathbf{y}-\overline{y}_0\mathbf{t}-\overline{y}_4\mathbf{v} \end{aligned}$$

de onde obtemos

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -c_1 & c_2 & c_3 & -\mathbf{y}\cdot\mathbf{r} \\ c_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -d_1 \\ c_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -d_2 \\ c_3 & e_2 & -e_1 & 0 & -d_3 \\ \mathbf{y}\cdot\mathbf{r} & d_1 & d_2 & d_3 & 0 \end{pmatrix}$$

e enfim

$$\Gamma_4 = [\overline{y}_i\overline{y}_j]$$

onde i,j=0,1,...,4.

É de se notar que quando $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$ obtemos todos os resultados para o grupo das rotações do espaco S_4 bem como, a partir deste, e considerando agora $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ obtemos os resultados para o grupo das rotações do espaço S_3.

Enfim, temos os dois invariantes b_2 e b_4, também chamados operadores de Casimir, associados ao grupo de Fantappié-de Sitter onde b_2 está associado com o quadrado da massa e b_4 com o produto do quadrado da massa pelo quadrado do momento angular do spin[9,10]. No caso do invariante b_2 podemos mostrar[6,9,10] que no limite $r \to \infty$ temos

$$\lim_{r\to\infty} b_2 \Longrightarrow (\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})$$

que é exatamente o operador de d'Alembert, razão pela qual chamamos b_2 como sendo o operador de d'Alembert generalizado.

III. A Equação de d'Alembert Generalizada

Como é sabido, a equação de d'Alembert está associada a um cone de luz de abertura fixa da Relatividade Especial (constância da velocidade da luz). Em passando-se para a Relatividade Projetiva[11] emerge uma outra constante, raio do cronotopo (raio do Universo de de Sitter) a qual faz com que se fundam as translações e as rotações do cronotopo nas rotações do espaço pentadimensional de onde intervém o chamado cronotopo de Castelnuovo ao qual associamos uma equação de d'Alembert generalizada.

No caso bidimensional (escrevemos o operador b_2 em termos de coordenadas esféricas, separamos as variáveis e consideramos apenas a equação de d'Alembert com uma dimensão espacial e outra temporal) a equação de d'Alembert generalizada é dada por[6]

$$[(1+x^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2xt\frac{\partial^2}{\partial t\partial x} - (1-t^2)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2(N-1)(x\frac{\partial}{\partial x} + t\frac{\partial}{\partial t}) + N(N-1)]\Phi = 0$$

onde temos considerado $r = c = 1$ e N é um parâmetro.

Introduzindo-se a seguinte mudança de variável independente

$$\xi = arctan x + arcsen(t/\sqrt{1+x^2})$$

$$\eta = arctan x - arcsen(t/\sqrt{1+x^2})$$

bem como definido uma nova variável dependente do tipo

$$\Phi_N(\xi,\eta) = [cos(\frac{\xi-\eta}{2})cos^{-1}(\frac{\xi+\eta}{2})]^N\Psi_N(\xi,\eta)$$

obtém-se a seguinte equação diferencial

$$[4cos^2(\frac{\xi-\eta}{2})\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + N(N+1)]\Psi_N(\xi,\eta) = 0$$

que constitui a chamada equação de d'Alembert generalizada. Tal equação foi discutida, no caso de um problema local, por meio da função de Green[12].

Nos casos específicos em que o parâmetro N é igual a zero ou menos um, a solução da equação é dada por (já na variável inicial)

$$\Phi(x,t) = f[arctanx + arcsen(t/\sqrt{1+x^2})] + g[arctanx - arcsen(t/\sqrt{1+x^2})]$$

onde f e g são duas funções arbitrárias duas vezes continuamente diferenciáveis.

Tal expressão está associada a um cone de luz de abertura variável da Relatividade Projetiva[13] e no limite em que o raio do cronotopo vai a infinito obtemos:

$$\lim_{r \to \infty} \Phi(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

que é exatamente a solução de d'Alembert para a equação de onda a qual está associada ao cone de luz com abertura fixa da Relatividade Especial.

Conclusões

No presente trabalho discutimos os grupos de rotação com dez parâmetros a partir da metodologia proposta por Arcidiacono. No caso do grupo de Fantappié-de Sitter, que contém como casos limites os grupos de Poincaré e Galileu, associado à Relatividade Projetiva, obtivemos as matrizes da expansão de e^F bem como os invariantes de tal grupo. Identificamos o operador de Casimir de segunda ordem com a chamada equação de d'Alembert generalizada da qual emerge um cone de luz com abertura variável da Relatividade Projetiva a qual constitui um primeiro aperfeicoamento da Relatividade, relacionada com a teoria dos Universos Físicos.

Uma continuação natural deste trabalho é passar para o grupo sucessivo, isto é o grupo das rotações no espaço hexa-dimensional, agora com quinze parâmetros, de onde emerge naturalmente o caso do movimento acelerado bem como podemos inserir neste esquema grupal, o grupo conforme. Estudos nesta direção já foram iniciados [14].

Agradecimentos

(ECO) agradece aos professores G. Arcidiacono e U. Bartocci pela hospitalidade encontrada no "Dipartimento di Matematica, Università di Perugia, Italia" onde este trabalho foi concluído e ao professor W. A. Rodrigues Jr. por várias e frutíferas discussões. Gostaria tambΘm de agradecer a CAPES (BEX 0859/91) pela concessão de uma bolsa de Pós-Doutorado. (GCD) agradece a CAPES pela concessão de uma bolsa de Mestrado.

Referências

1. E. Galois, *Sur la Théorie des Nombres*, Bull. Sci. Math. Férussac, **13**,428(1830) -Obra Original.

2. J.R.Bastida. *Fields Extensions and Galois Theory* in Encyclopedia of Mathematics and its Applications, edited by Gian-Carlo Rota, Addisson Wesley Publishing Company, USA (1984)

3. S. Lie, *Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen* (G. Scheffers, ed), Leipzig (1893) -Obra Original

4. E.P.Wigner, *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Academic Press Inc., New York (1959)

5. L.Fantappié, *Caratterizzazione Analitica delle Grandezze della Meccanica Quantica* Rend.Lincei **12**,285(1952) e *Su una Nuova Teoria di Relatività Finale*, Rend.Lincei **17**,158(1954).

6. G.C.Ducati e E.Capelas de Oliveira; *The d'Alembert Wave Equation Revisited* Aceito para a publicação em Int. Jour.Math. Sci.Educ. and Technol.(1995)

7. L.Fantappié, *Sulle Funzioni di una Matrice*, Anais da Academia Brasileira de Ciências, n.1,**26**(1954)

8. G.Arcidiacono, *Sui Gruppi Ortogonali negli Spazi a tre, quattro, cinque Dimensioni*, Portugaliae Mathematica **14**,63(1955)

9. E.Capelas de Oliveira e E.A.Notte Cuello, em (P.Letelier e W.A.Rodrigues Jr. (eds)) *Gravitation: The Spacetime Structure*, Proc. SILARG VIII, World Scientific Pub. Co. 381(1994)

10. E.A.Notte Cuello e E. Capelas de Oliveira *A New Construction of the Casimir Operators for the Fantappié-de Sitter Group* aceito para a Publicação em Hadronic Journal (1995)

11. G. Arcidiacono; *Relatività e Cosmologia*, Di Renzo, Roma (1995)

12. E.Capelas de Oliveira; *On the Solution of Homogeneous Generalized Wave Equation*, J.Math.Phys.**33**,3757(1992)

13. G.C.Ducati,*O Cone de Luz com Abertura Variável*, Seminário, IMECC-UNICAMP (1994)

14. E.Capelas de Oliveira e G. Arcidiacono; *Projective Relativity and the Conformal Group*, em fase final (1995)

RELATÓRIOS DE PESQUISA — 1995

01/95 Modelo de Regressão Weibull Dependente para Testes Acelerados em Riscos Competitivos – *Silvia Emiko Shimakura* and *Cecilia Yuko Wada*

02/95 Semilinear Elliptic Equations with Exponential Nonlinearities – *João Marcos Bezerra do Ó*

03/95 Some inequalities for immersed surfaces – *Valery Marenich* and *Jesus Valle Guadalupe*

04/95 Geometria e Topologia de Fluxos de Anosov em 3-variedades – *Sergio R. Fenley*

05/95 Tangent Cones at Infinity Under Quadratic Sectional Curvature Decay – *G. Pacelli Bessa* and *Valery Marenich*

05/95 Tangent Cones at Infinity Under Quadratic Sectional Curvature Decay – *G. Pacelli Bessa* and *Valery Marenich*

06/95 The Holonomy in Open Manifolds of Nonnegative Curvature – *Valery Marenich*

07/95 The Log Gamma Model and the Choice of a Parametric Lifetime Model – *Dione Maria Valença* and *Jonathan Biele*.

08/95 Shock Indicator for Adaptive Schemes for Conservation Laws – *Cristina Cunha* and *Sônia M. Gomes*.

09/95 Singularities of Reversible Vector Fields – *Marco Antonio Teixeira*

10/95 On the Homology of Manifolds — *Ricardo N. Cruz*.

11/95 Submersions of Open Manifolds of Nonnegative Curvature — *Valery Marenich*

12/95 Topological Gap-Phenomenon — *Valery Marenich*

13/95 Cohomogeneity one Manifolds and Hypersurfaces of Revolution – *Antonio Carlos Asperti*, *Francesco Mercuri* and *Maria Helena Noronha*

14/95 Low Codimensional Submanifolds of Euclidean Space with Nonnegative Isotropic Curvature – *Francesco Mercuri* and *Maria Helena Noronha*

15/95 Creation of Particles in the Early Friedmann Universe – *A. A. Grib*

16/95 EPR Paradox, Bell's Inequalities and Telepathic Communication – *A. A. Grib*