GEOMETRIAS NÃO–EUCLIDIANAS–
–MODELOS POLIEDRAIS

Sueli I. Rodrigues Costa
e
Sandra Augusta Santos

RELATÓRIO TÉCNICO Nº 51/87

RESUMO. O texto é uma abordagem informal das geometrias não–euclidianas. Procura-se transmitir o ponto de divergência e caracterizações principais entre as geometrias elíptica, euclidiana e hiperbólica, incluindo o aspecto histórico. Os modelos poliedrais construidos oferecem uma visualização destas geometrias, que é particularmente interessante no caso hiperbólico.

ABSTRACT. This is an informal survey in non–Euclidean geometries. It is developed in order to introduce both the divergence point and the main characterization between the eliptic, Euclidean and hyperbolic geometries, including historical aspects. The constructed polyhedral models allow an interesting overview of these geometries, specially in the hyperbolic case.

Universidade Estadudal de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação
IMECC – UNICAMP
Caixa Postal 6065
13.081 – Campinas, SP
BRASIL

Dezembro – 1987

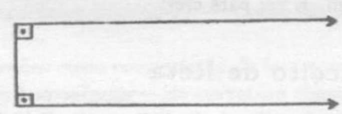
Geometrias Não-Euclidianas
Modelos Poliedrais

Sueli I. Rodrigues Costa
e
Sandra Augusta Santos*
Instituto de Matemática
UNICAMP

"Uma geometria não pode ser mais verdadeira que a outra, pode apenas ser mais conveniente". H. Poincaré (1851-1912)

A origem das chamadas geometrias não euclidianas está ligada ao questionamento do quinto postulado de Euclides (330 - 275 a.C.), feito praticamente desde sua formulação, por ter este uma forma mais complexa que a dos demais e principalmente por se acreditar em sua redundância. A prova de que ele era independente dos anteriores surgiu junto com a constatação de que era possível construir outra geometria contendo os postulados anteriores e a negação deste.

O ponto de divergência entre as geometrias euclidiana e não-euclidianas aparece na discussão do conceito de paralelismo. Observe o diagrama:



Na geometria euclidiana a distância entre as semi-retas permanece a mesma quando nos movemos para a direita. No início do século passado foram propostas duas geometrias alternativas onde esta distância aumenta [*geometria hiperbólica*] ou diminui [*geometria elíptica*] ao nos afastarmos das origens. Como você verá no histórico, os principais personagens da fase inicial desta revolução foram Gauss, Bolyai e Lobatchevski. Estas geometrias não-euclidianas foram depois incorporadas numa geometria mais geral desenvolvida por K. F. Gauss e G. Riemann, que ficou conhecida como *geometria riemanniana*.

*Bolsista da FAPESP - projeto Geometria(s) - processo 86/2534-3

Alguns autores consideram que esta revolução na geometria foi cientificamente tão importante quanto a de Copérnico em astronomia ou a da teoria da evolução de Darwin, com efeitos muito profundos sobre os conceitos de verdade e realidade. Imagine quão chocante foram estas idéias em 1820, se hoje, mesmo tendo ouvido falar em teoria da relatividade, as achamos tão estranhas ...

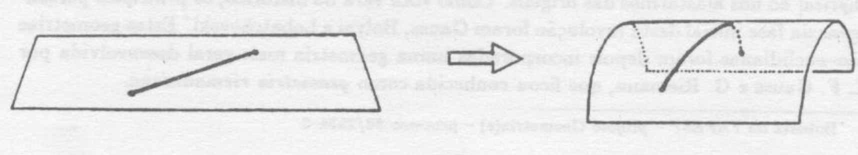
Desde então estas geometrias têm sido utilizadas para a descrição de diferentes fenômenos físicos e, em outros casos, sistematizado questões sobre possíveis modelos. Qual a geometria do universo? A geometria euclidiana parece descrever nosso mundo real com boa aproximação, pelo menos se não falarmos em distâncias intergalácticas ou subatômicas, mas o desenvolvimento da ciência nestes últimos cento e cinquenta anos mostra que talvez esta seja apenas uma questão de escala e que temos que estar abertos a todas as possibilidades. Do ponto de vista puramente matemático, poderíamos dizer, com base nos resultados recentes de variedades de dimensão três, que o universo tem maior probabilidade de ser hiperbólico. Esta é uma hipótese atualmente bem aceita por muitos físicos, embora não exista até agora nenhum fato experimental que a reforce substancialmente.

Voltando da "estratosfera", para o nosso dia a dia, queremos deixar claro que o objetivo deste texto é o de ser um estímulo a que se indague mais sobre geometrias não euclidianas. Acreditamos fortemente que essa será uma forma de se olhar a própria geometria tradicional sob insuspeitados ângulos. Afinal, depois de ver que o que julgávamos absolutamente óbvio não é tão óbvio assim, estaremos mais convencidos da sistematização necessária, reconstituindo a história.

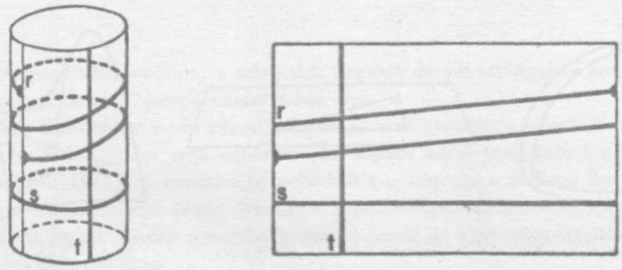
Neste artigo, consideramos particularmente interessante a seção "Construindo um plano hiperbólico". Temos certeza que depois desta construção você estará perfeitamente convencido, por exemplo, de que é possível traçar infinitas paralelas a uma reta, tendo todas elas um ponto comum. É ver para crer! ···

Ampliando o Conceito de Reta

Vamos abordar neste texto a geometria bidimensional ("plana") e um recurso muito produtivo seria imaginar que seu mundo real tivesse apenas duas dimensões (e não fosse necessariamente plano). O que lhe daria a idéia de "reta" neste mundo ? Sugestões possíveis seriam a trajetória da luz, um caminho sem desvios laterais ou o prolongamento de uma curva que dá a menor distância entre dois pontos.



Se você desenhar uma reta ligando dois pontos numa folha de papel e curvá-la, esta linha ainda pode ser pensada como uma "reta" sobre a superfície curva. Isto no sentido de que ao caminharmos sobre ela, não nos desviamos nem para a esquerda nem para a direita. Restringindo-nos aos respectivos mundos bidimensionais da folha de papel plana e curva, não distinguimos as duas situações. Isto é, um objeto morando na superfície curva vê sua "reta" da mesma forma que um objeto do plano vê a reta do plano.



Observe que se você enrolar a folha formando um cilindro, as suas retas serão retas usuais, círculos e hélices. Da mesma forma, você pode verificar quem são as "retas" de um cone.

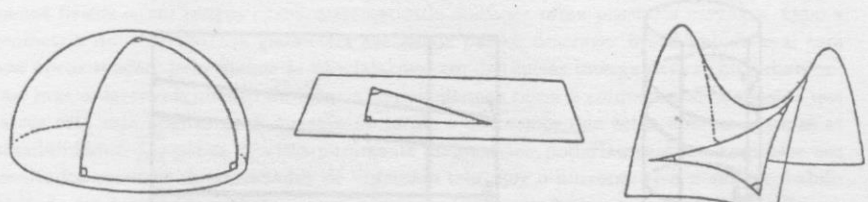
Esta idéia pode ser estendida para superfícies não planificáveis, como a esfera, por exemplo. Nestas superfícies, a caracterização de "reta" ou geodésica é dada por curvas cuja normal coincide com a normal à superfície (não entortamos nem para a esquerda, nem para a direita). No caso da esfera, as retas são os grandes círculos. Dados dois pontos sobre uma superfície, um "segmento" é uma curva que os une e tem o menor comprimento possível. Pode ser mostrado que um "segmento" é sempre um trecho de geodésica ("reta").

Como é a geometria em superfícies quaisquer? — Como são seus segmentos, ângulos, triângulos?

Para podermos falar em noções como congruência de forma análoga à do plano temos que nos restringir às superfícies homogêneas — de curvatura constante. Assim, resultados para um triângulo, por exemplo, não dependerão da localização de seus vértices.

Geometrias Não–Euclidianas

Existem três tipos de geometria de dimensão dois homogêneas. Elas podem ser ilustradas localmente por:

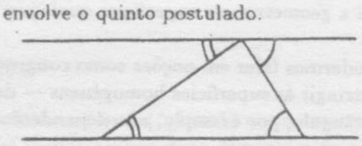


As geometrias elíptica e hiperbólica são chamadas não-euclidianas por não satisfazerem o quinto postulado de Euclides, que é equivalente a *"Por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela à reta dada"*.

Na geometria elíptica, a negação do quinto postulado é feita afirmando-se que por um ponto fora de uma reta não passa nenhuma reta paralela à reta dada. Na hiperbólica, assume-se mais do que uma paralela à reta dada.

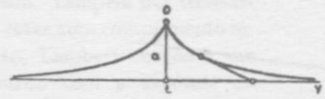
Observe que a demonstração da proposição da geometria euclidiana *"A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°"* envolve o quinto postulado.

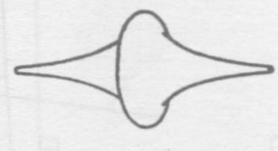
Mais do que isto, mostra-se que esta proposição é equivalente ao quinto postulado.



A soma dos ângulos de um triângulo na esfera é sempre maior que 180°, sendo o "defeito" proporcional à área do triângulo. (Veja o artigo do prof. Elon L. Lima, na Revista do Professor de Matemática, número 5, p. 23). Um modelo para a geometria elíptica é a esfera, superfície de curvatura constante positiva, considerando-se os pontos antípodas identificados.

A idéia local de um modelo para a geometria hiperbólica é dada pela sela. Modelos desta geometria são descritos por superfícies de curvatura constante negativa. Um exemplo de tal superfície é a ***pseudo esfera***, que é obtida pela rotação da tratriz[1].





Na geometria hiperbólica, a soma dos ângulos de um triângulo é sempre menor que 180°, sendo o "defeito" proporcional a sua área.

O plano hiperbólico é um plano munido de uma geometria hiperbólica. Ele não pode ser "concretizado" como uma superfície do espaço usual (este fato foi provado por D. Hilbert - 1862–1943). A construção poliedral que sugerimos no final lhe dará uma idéia de como se comporta este plano "crespo". Neste modelo aproximado, medimos ângulos e distâncias da forma usual e obtemos "retas" a partir de segmentos traçados sobre trechos planificados da superfície.

No histórico a seguir faremos referência a vários modelos perfeitos do plano hiperbólico. Um deles, bastante difundido, é o semi-plano de Poincaré, onde se considera ângulos usuais mas uma outra noção de distância, o que implica em, por exemplo, semi-círculos serem "retas".

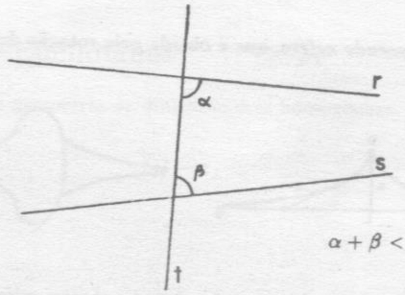
Histórico

A primeira sistematização da geometria, em sua forma axiomática, foi feita nos Elementos de Euclides (330 a 275 a.C.), originando uma questão em torno do quinto postulado, também conhecido como postulado das paralelas, cujo enunciado é:

"Se uma reta, interceptando duas retas num plano, forma ângulos interiores de um mesmo lado com soma menor que dois ângulos retos, então as duas retas, se prolongadas indefinidamente, irão se encontrar do lado cuja soma dos ângulos é menor que dois retos."

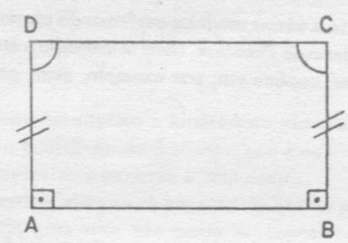
[1] A tratriz é a curva descrita por um ponto 0 ao ser tracionado através de uma corda de comprimento fixo a por um objeto t que se move ao longo de um eixo (y). Mostra-se usando equações diferenciais, que $x = asech(u)$, $y = a(u - tgh(u))$ são equações paramétricas da tratriz

Esquematizando:



$$\alpha + \beta < \pi \Rightarrow r \cap s = \{P\}$$

Devido ao seu tamanho e complexidade, acreditava-se ser possível obtê-lo como dedução lógica a partir dos outros postulados e axiomas, considerados de evidência imediata. Durante cerca de dois mil anos, inúmeras tentativas foram feitas neste sentido. Posidônio (sec I a.C.), Ptolomeu (sec II- Alexandria), Proclus (sec V - Atenas) e John Wallis (1616-1703), por exemplo, utilizaram-se de fatos assumidos sem provas ou de procedimentos equivalentes ao quinto postulado, numa argumentação essencialmente circular.



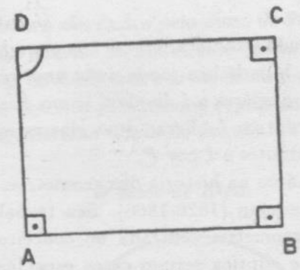
Quadrilátero de Saccheri

Com Saccheri (1667-1733-Itália) teve início uma abordagem mais criativa para o problema através do argumento de redução ao absurdo. Tomando um quadrilátero $ABCD$ com lados AD e BC iguais e perpendiculares à base AB, ele provou que os ângulos de cúpula C e D são iguais.

Em princípio estes ângulos poderiam ser retos, agudos ou obtusos. Assumindo que fossem agudos ou obtusos, Saccheri esperava obter contradições e provar a validade da hipótese do ângulo reto, ou seja, do postulado das paralelas. Com a hipótese do ângulo obtuso, ele de fato chegou a um absurdo, concluindo que neste caso as retas não poderiam ser infinitas, isto é, prolongáveis (na geometria elíptica construída posteriormente, as retas são finitas e os ângulos de cúpula são obtusos). Supondo ângulos agudos para a cúpula de seu quadrilátero, Saccheri obteve uma série de conclusões corretamente demonstradas e consistentes entre si, que embora não familiares, não forneceram a contradição desejada. Apesar de não ter sido esta a intenção de Saccheri, estava evidenciada a possibilidade de uma nova geometria.

Lambert (1728-1777 — Suíça) utilizou-se de um método semelhante ao de Saccheri: também tomou um quadrilátero $ABCD$, mas com três ângulos retos.

Assumir que o quarto ângulo fosse agudo ou obtuso significaria contradizer o quinto postulado. Também por considerar retas com comprimento infinito, Lambert chegou a um absurdo com a hipótese do ângulo obtuso, mas não no caso agudo. Supondo o quarto ângulo como sendo agudo, depois de deduzir que a soma dos ângulos de um triângulo é menor que 180°, ele prosseguiu mostrando que esta soma aumenta quando a área diminui. Considerando a diferença positiva entre a soma dos ângulos e 180°, que Lambert chamou de *defeito* do triângulo, provou que o defeito é proporcional à área ($D = KA$) e então quando a área vai a zero, o defeito também vai a zero e a soma dos ângulos do triângulo tende para 180°. Legendre (1752-1833 - França) também tentou deduzir o quinto postulado com o argumento da redução ao absurdo, mas sem perceber assumiu um fato equivalente ao que desejava demonstrar.



Quadrilátero de Lambert

K. F. Gauss (1777-1855) parece ter sido o primeiro a acreditar na independência do quinto postulado, aceitando a possibilidade lógica de uma geometria na qual o postulado das paralelas é substituído por outro, equivalente à hipótese dos ângulos agudos, de Saccheri e Lambert. Embora ele nada tenha publicado, temendo incompreensão, suas reflexões sobre este tema podem ser resgatadas através de sua correspondência nas três primeiras décadas do século passado. Já em 1799 ele escreve a W. Bolyai, perturbado com a possibilidade de uma geometria onde a área dos triângulos fosse limitada, e em 1813 passa a aceitar esta nova geometria, que chama inicialmente de anti–euclidiana, astral e finalmente de *geometria não–euclidiana*. Uma preocupação de Gauss era se esta geometria poderia ser adequada à descrição do espaço físico. Dentre seus trabalhos sobre geodésicas, relata-se uma experiência usando sinais luminosos, onde ele considerou o triângulo formado por três picos de montanhas. Dentro da precisão dos instrumentos, ele concluiu que a soma dos ângulos era 180°.

O matemático russo Nikolai Lobachevski (1792-1853) foi o primeiro a publicar um trabalho sobre geometria não-euclidiana, em 1829. Seu trabalho não atraiu muita atenção, principalmente porque foi publicado em russo e recebeu muitas críticas em seu país. Foi seguido, independentemente, pelo jovem húngaro Janos Bolyai (1802-1860), cujo primeiro ensaio constava como apêndice do livro de geometria do pai, Farkas Bolyai, em 1832. Na introdução, J. Bolyai ressalta a importância do seu trabalho e observa que as pessoas bem pensantes saberiam apreciá–lo, concluindo com a frase: "Do nada, criei um estranho novo universo". Tanto Lobachevski quanto Bolyai basearam suas geometrias na hipótese do ângulo agudo e tomaram retas como tendo comprimento infinito. Construíram assim uma geometria hiperbólica, onde dada uma reta ℓ e um ponto P fora de ℓ, as retas passando por P e coplanares a ℓ dividem-se em duas classes: as que interceptam ℓ e as infinitas que não interceptam ℓ. Estas duas classes estão separadas por duas retas conhecidas como paralelas limites a ℓ por P.

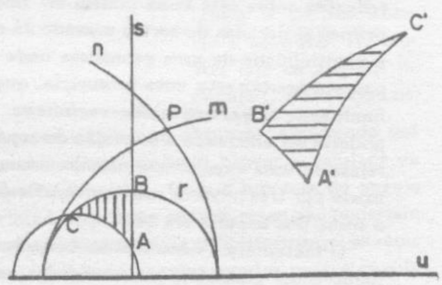
Um marco na história das geometrias não-euclidianas foi a tese apresentada em 1854 por G. Riemann (1826-1866). Seu trabalho, baseado em trabalhos anteriores de Gauss, trata da geometria centrada no conceito de curvatura. As geometrias euclidiana, hiperbólica e elíptica seriam casos especiais, onde a curvatura é constante. A geometria riemanniana é a que dá suporte à teoria da relatividade geral de Einsten (1917).

Apesar de até então não terem sido encontradas inconsistências nas geometrias não-euclidianas, muitos matemáticos acreditavam ser possível encontrar alguma falha após um estudo mais aprofundado de suas propriedades. Este descrédito desapareceu graças à introdução dos modelos. Um primeiro modelo para a geometria hiperbólica foi feito pelo matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900), em 1868. Beltrami trabalhou com superfícies de curvatura constante negativa. Ele mostrou que as geodésicas destas superfícies podem ser interpretadas como retas, obtendo uma geometria para a qual vale a hipótese dos ângulos agudos.

O cientista francês Henry Poincaré (1854-1912) introduziu modelos para descrever o plano munido de uma geometria hiperbólica e inclusive utilizou estes modelos para obter resultados sobre variáveis complexas.

O modelo de semi-plano de Poincaré

As retas são semi-círculos (r) com centro em u e semi retas verticais (s); os ângulos são medidos da forma usual; a noção de distância é diferente da euclidiana, variando com o inverso da distância usual a u. Neste modelo, construído tomando-se o semi-plano formado pelos pares (x,y) com $y > 0$, o elemento de comprimento de arco (métrica) é dado por:

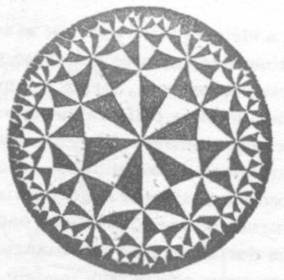


$$ds_H = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$$

Neste desenho os triângulos ABC e A'B'C' são congruentes e pelo ponto P passam infinitas retas paralelas a r. As duas retas traçadas m e n são as paralelas limites e delimitam a região que contem as demais paralelas.

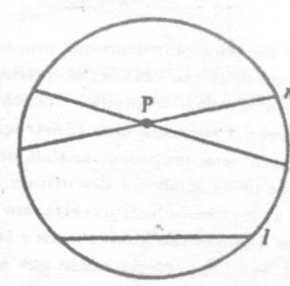
Outros modelos para geometria hiperbólica são dados pelo disco de Poincaré e o disco de Klein. O primeiro é formado pela região interior de um círculo unitário, assumindo-se a noção usual de ângulo e tendo-se por retas os diâmetros e arcos de circunferência ortogonais ao bordo do disco. O disco de Klein é descrito pela mesma região acima; tomando-se por retas as cordas e considerando-se uma diferente noção de ângulo.

O disco de Poincaré



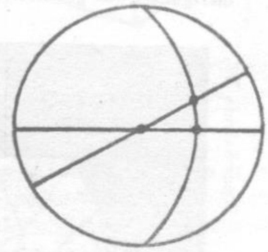
Os triângulos são congruentes

O disco de Klein



As retas m e n são paralelas a ℓ

Dois modelos para a geometria elíptica foram introduzidos por Klein: o plano projetivo (a esfera com os pontos antípodas identificados) e um modelo conforme num disco fechado do plano, com identificação dos pontos antípodas do contorno. Neste modelo, os ângulos são os usuais e as retas são dadas pelos diâmetros e arcos de circunferência conectando pontos diametralmente opostos. *A soma dos ângulos do triângulo ao lado é maior que* 180°



Através dos modelos, provou-se ao mesmo tempo a independência do postulado das paralelas de Euclides e a "compatibilidade" desta nova geometria, onde todos os demais postulados euclidianos são satisfeitos.

O impacto do surgimento das novas geometrias na área de fundamentação da matemática foi enorme e você poderá apreciar um pouco deste aspecto no apêndice.

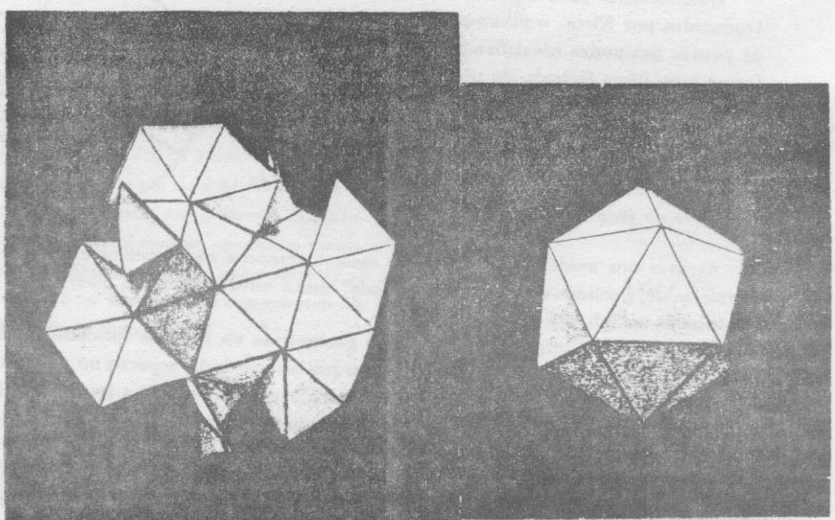
Descrições não-euclidianas do mundo físico, como são feitas na teoria da relatividade, em óptica e em propagação de ondas, mostraram-se bastante adequadas e têm servido de estímulo para o desenvolvimento da geometria.

Na pesquisa atual em matemática, as geometrias não-euclidianas aparecem em diversos campos, como em sistemas dinâmicos, funções automorfas e teoria dos números, com destaque especial para o estudo das variedades de dimensão três. É nesta área que estão os trabalhos de W. Thurston, da Universidade de Princeton (EUA), que é considerado um dos grandes matemáticos em atividade (medalha Fields - 1982).

Construção Poliedral - Modelos Aproximados Para as Geometrias Elíptica e Hiperbólica

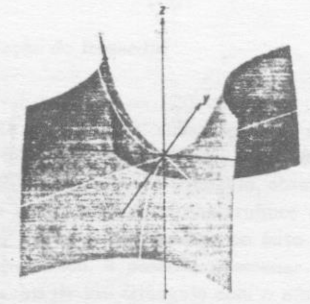
Nos modelos poliedrais que propomos, a idéia central é a de que as superfícies elípticas ou hiperbólicas são obtidas ao retirarmos ou acrescentarmos área ao plano. Como consequência teremos triângulos "côncavos" ou "convexos", menos ou mais paralelas, etc. Em [Weeks] é sugerida uma construção que aproxima poliedralmente o plano hiperbólico. Ampliando esta proposta, analisamos o comportamento da elementos da geometria hiperbólica neste modelo e discutimos as analogias no caso elíptico.

Estas regiões poliedrais retratam de forma aproximada as geometrias não–euclidianas, uma vez que não são homogêneas e têm singularidades nos vértices, onde a curvatura está concentrada. É por esta razão que a soma dos ângulos de um triângulo vai depender de quantos vértices englobamos, e não da área, como ocorre num modelo perfeito. A grande importância destes modelos é que eles são naturais e nos permitem visualizar os elementos intrigantes das geometrias não-euclidianas.



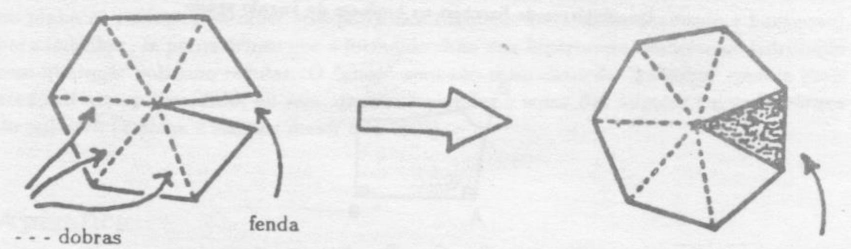
Miltur Sakoda Jr.

Construindo um "Plano Hiperbólico"



O parabolóide hiperbólico, com seu formato de sela, fornece-nos uma idéia local do plano hiperbólico. Para visualizarmos este plano globalmente, precisaríamos imaginar seus infinitos pontos como sendo pontos de sela.

Neste modelo isto é feito colando-se selas poliedrais (unidades básicas). Cada uma desta unidades consiste de sete triângulos equiláteros unidos conforme o esquema a seguir

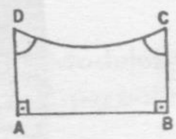


Chamando o centro do hexágono original de *vértice* e seguindo este princípio de em cada vértice chegarem sete triângulos, vamos unindo estas unidades e obtendo o "plano hiperbólico", numa aproximação tão melhor quanto maior for o número de unidades conectadas (a malha lisa (I) em anexo é para ser utilizada nesta construção).

Traçando Triângulos

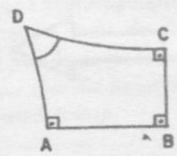
Os segmentos nesta superfície são segmentos euclidianos obtidos quando a planificamos localmente. Desenhando triângulos envolvendo nenhum, um ou dois vértices, pode-se observar como varia a soma de seus ângulos internos. Obteremos, respectivamente, 180°, 120° e 60°. Estes dados experimentais podem ser demonstrados usando-se o teorema de Gauss-Bonnet.

Outras visualizações interessantes neste modelo são as dos quadriláteros de Saccheri e Lambert e de suas propriedades.



$$\hat{A} = \hat{B} = \tfrac{\pi}{2}$$
$$\overline{AD} = \overline{BC} \quad \text{(lados)}$$
$$\hat{C} = \hat{D} < \tfrac{\pi}{2} \quad \text{(ângulos de cúpula)}$$
$$\overline{CD} > \overline{AB}$$

Quadrilátero de Saccheri na hipótese do ângulo agudo



$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \tfrac{\pi}{2};$$
$$\hat{D} < \tfrac{\pi}{2}$$
$$\overline{CD} > \overline{AB};\ \overline{AD} > \overline{BC}$$

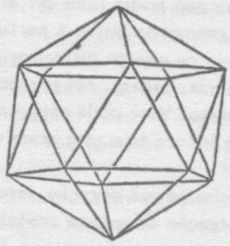
Quadrilátero de Lambert na hipótese do ângulo agudo

Observação: Devido ao modelo ser uma aproximação para o plano hiperbólico, existem algumas limitações. Por exemplo, no quadrilátero de Saccheri, para que seja satisfeita a igualdade dos ângulos de cúpula, a figura deve ser simétrica em relação ao(s) vértice(s) que engloba em seu interior.

Visualizando as Infinitas Paralelas

Neste modelo pode-se ter uma idéia clara de que por um ponto fora de uma reta existem infinitas paralelas à reta dada (a malha II em anexo já contem algumas destas "retas" pré-traçadas).

Comparando com a Geometria Elíptica - Construção do Icosaedro



Note que, se na construção da unidade básica do "plano hiperbólico", ao invés de inserirmos, retirarmos um triângulo, obtemos um módulo a partir do qual construímos um icosaedro. Num estudo análogo ao feito no modelo hiperbólico, é possível relacionar a soma dos ângulos de um triângulo com o número de vértices que ele envolve.

Pode-se construir modelos poliedrais diferentes, formados por outros polígonos. É interessante notar que ladrilhar hiperbolicamente pode ser muito mais divertido. Enquanto no plano só podemos escolher três polígonos regulares (triângulo, quadrado e hexágono) para ladrilhar, se permitirmos que a forma do chão seja hiperbólica, poderemos ladrilhá-lo com qualquer polígono regular. O "chão" será tão mais cheio de "babados" quanto mais área estivermos inserindo, ou seja, quanto maior for a soma dos ângulos em cada vértice do poliedro (a soma é sempre maior que 360°).

Apêndice

Os Postulados de Euclides e a Formulação de Hilbert da Geometria.

Os Elementos de Euclides são considerados o primeiro tratado sistemático em geometria.

Euclides não especificou suas relações e conceitos primitivos; estes aparecem como definições em termos de idéias que seriam familiares a todo mundo. Seus cinco postulados são:

1) Uma reta pode ser traçada ligando um ponto a qualquer outro ponto.

2) Uma reta finita (segmento) pode ser estendida continuamente numa linha reta.

3) Um círculo pode ser descrito com qualquer centro e qualquer raio.

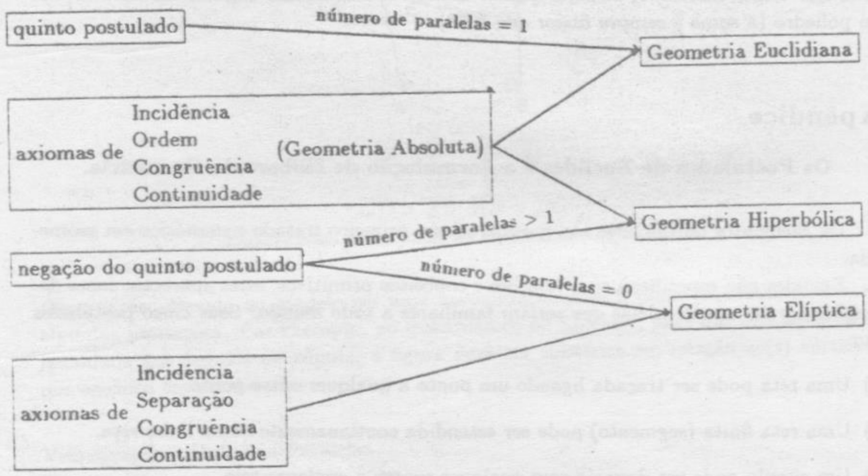
4) Todos os ângulos retos são iguais.

5) Se uma reta, interceptando duas retas num plano, forma ângulos interiores de um mesmo lado com soma menor que dois retos, então as duas retas, se prolongadas indefinidamente, irão se encontrar do lado cuja soma dos ângulos é menor que dois retos.

Dentre as conseqüências do aparecimento das novas geometrias, está o questionamento da axiomatização de Euclides. O "rigor" desta sistematização não podia mais ser aceito incondicionalmente. Entre as formulações mais rigorosas de geometria feitas a partir do século passado, é bastante difundida a de Hilbert (1899). Nela os quatro primeiros postulados de Euclides são substituídos por axiomas de incidência, ordem, congruência e continuidade, e a geometria assim construída é chamada absoluta. Você pode encontrar a formulação e uma discussão desta axiomática em [Rocha], de leitura bastante acessível e que recomendamos fortemente.

Conforme acrescentarmos o axioma das paralelas de Euclides ou sua negação, teremos respectivamente as geometrias euclidiana e hiperbólica. A negação do quinto postulado, neste caso, só pode ser feita assumindo-se que haja mais do que uma paralela à reta dada. Como a geometria absoluta possibilita a existência de pelo menos uma reta paralela, para obtermos a geometria elíptica, além de negarmos o quinto postulado com a hipótese de não existirem retas paralelas, ainda precisamos substituir os axiomas de ordem (relação de um ponto "estar entre"" outros dois) por axiomas de separação.

Esquematicamente temos:



Cabe observar que teoremas cuja prova não depende dos axiomas de ordem e paralelismo são válidos nas três geometrias. Um exemplo destes é dado por "Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais".

Poderemos questionar sobre a *consistência* destas geometrias. Uma teoria é chamada consistente se não pudermos, a partir de seus axiomas, provar um teorema e a negação deste. Esta é uma questão de lógica muito difícil de ser respondida e uma grande contribuição foi dada por Gödel em 1930. Ele provou que, em teorias suficientemente complexas (num sentido que pode ser rigorosamente estabelecido e que inclui as geometrias), não é possível demonstrar consistência partindo de elementos da própria teoria. Podemos detectar *consistência relativa* através de modelos. Assim, um modelo para a geometria hiperbólica, como os descritos na secção anterior, construído a partir de elementos de geometria euclidiana, mostra que se esta for consistente a hiperbólica também o será. É possível concluir, através dos modelos, que do ponto de vista de consistência, as três geometrias são equivalentes: – uma delas é consistente se e só se a outra for.

Finalizamos com a resposta dada por Poincaré à questão de qual das três geometrias seria mais verdadeira.
(Extraído do livro Ciência e Hipótese - Edição original francesa - 1902)
"...O que pensar da questão: É a geometria euclidiana verdadeira ? Ela não tem sentido: Poderiamos da mesma forma nos perguntar se o sistema métrico é verdadeiro ou se os velhos pesos e medidas são falsos; se as coordenadas cartesianas são verdadeiras e as polares falsas. Uma geometria não pode ser mais verdadeira que outra, pode apenas ser mais conveniente".

Sugestões para Leitura e

Referências

[1] COXETER, H.S.: *Introduction to Geometry*. John Wiley & Sons, New York 1962.

[2] COURANT, R e ROBBINS, H.: *Que es la Matematica*. Editora Aguilar, Madrid, 1971 (versão original 1941).

[3] FABER, R.: *Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry*. Marcel Dekker, New York, 1983.

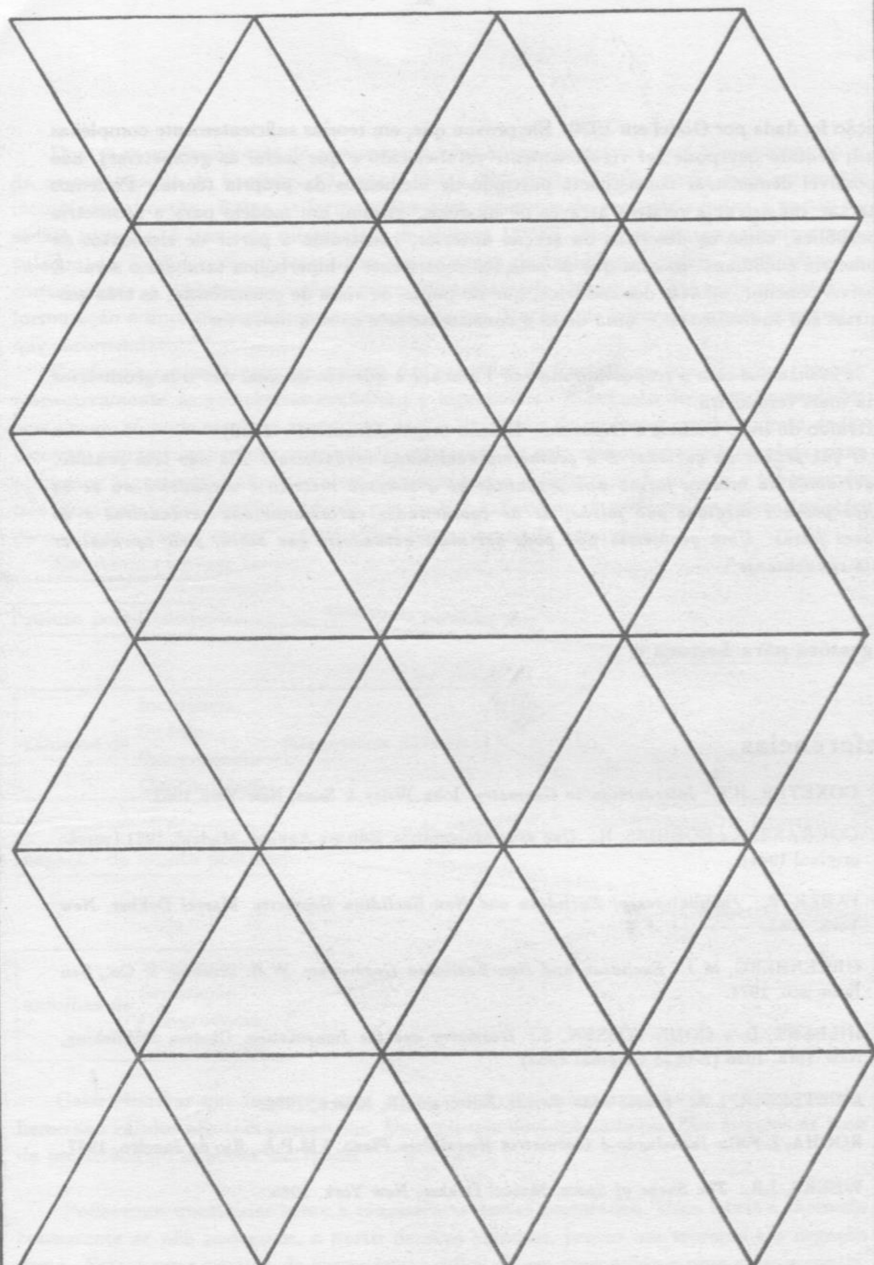
[4] GREENBERG, M.J.: *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. W.H. Freeman & Co., San Francisco, 1974.

[5] HILBERT, D. e COHN-VOSSEN, S.: *Geometry and the Imagination*. Chelsea Publishing, New York, 1956 (Edição Original 1932).

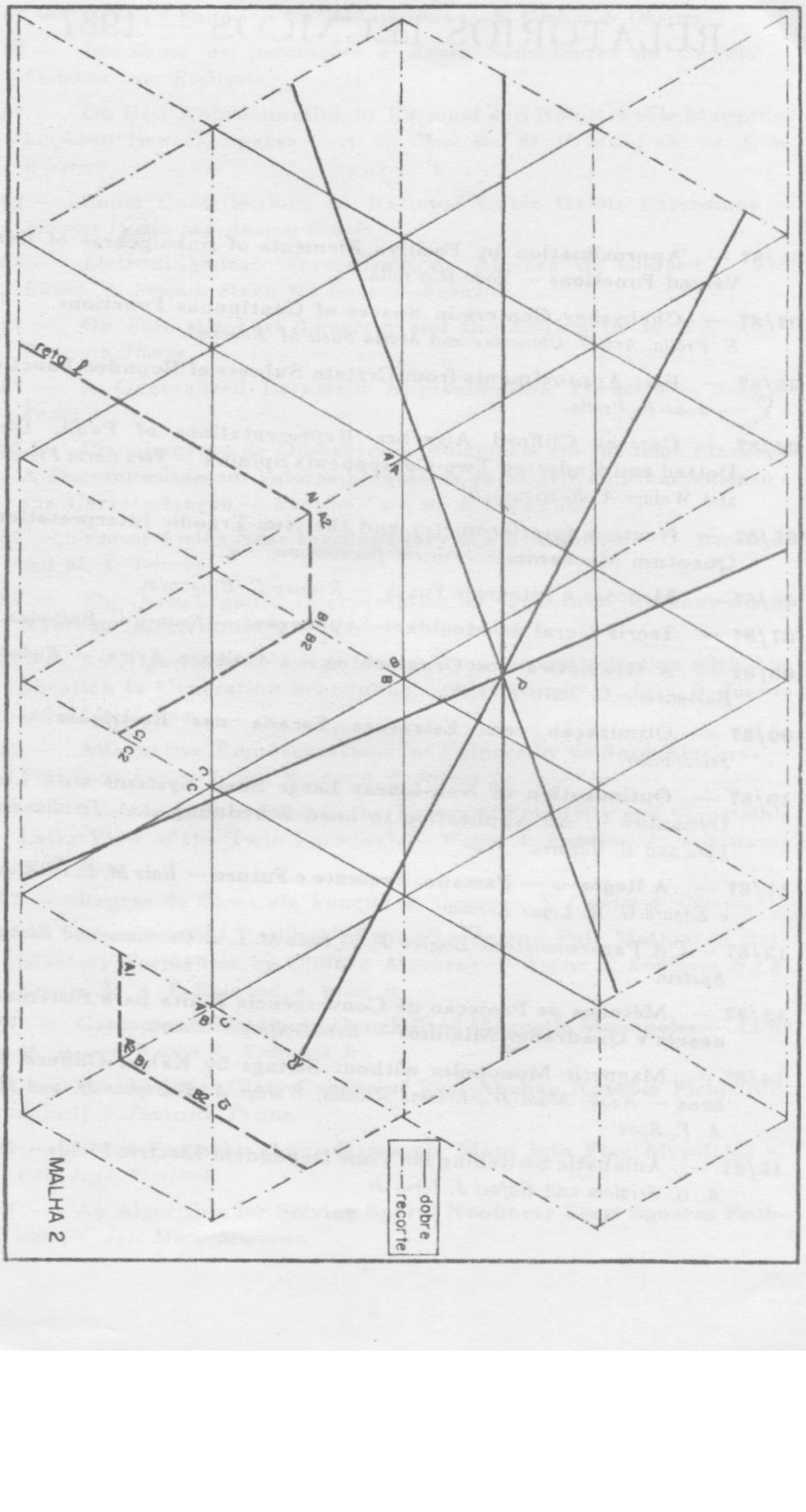
[6] LIUSTERNIK, L.A.: *Líneas Más Cortas*. Editora MIR, Moscu, 1979.

[7] ROCHA, L.F.C.: *Introdução à Geometria Hiperbólica Plana*. I.M.P.A., Rio de Janeiro, 1987.

[8] WEEKS, J.R.: *The Shape of Space*. Marcel Dekker, New York, 1985.



MALHA I


dobre
recorte
MALHA 2
reta