SUPERFÍCIES MINIMAIS

Notas de Palestras do Prof. M. Miranda (Univ. Trento)
Redigidas e organizadas por R.C. Bassanezi

RELATÓRIO TÉCNICO Nº 41/87

RESUMO. Este trabalho compreende uma série de 3 palestras proferidas pelo Prof. M. Miranda na UNICAMP em 1974 sobre Medida do Gráfico de Funções $L^1_{loc}(\Omega)$, gráficos de medidas minimais e o Teorema de Dirichlet para Equações de Superfícies Mínimas.

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação
IMECC – UNICAMP
Caixa Postal 6065
13.081 - Campinas, SP
BRASIL

Setembro – 1987

SUPERFÍCIES MINIMAIS

1. Medida do Gráfico de uma Função

Seja Ω um aberto do espaço euclidiano n-dimensional e f uma função real contínua sobre Ω assim como suas primeiras derivadas.
Em símbolos

$$\Omega \subset \mathbb{R}^n \quad , \quad f \varepsilon C^1(\Omega)$$

A medida do gráfico de f pode ser calculada pela integral

$$\int_\Omega \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \chi_i}\right)^2}\, d\chi$$

que será indicada, no que segue, com o símbolo

$$|\mathrm{graph}_\Omega\ f| \quad , \text{ ou simplesmente } |\mathrm{graph}\ f| .$$

Dizemos que f tem gráfico de medida mínima sobre Ω se vale

(1.1) $$|\mathrm{graph}_{\mathrm{suppg}}\ f| \leq |\mathrm{graph}_{\mathrm{suppg}}\ |(f+g)| \quad , \forall g \varepsilon C_o^1(\Omega).$$

A desigualdade (1.1), no caso em que $|\mathrm{graph}_\Omega\ f| < +\infty$, equivale a

(1.1') $$|\mathrm{graph}_\Omega f| \leq |\mathrm{graph}_\Omega (f+g)| \quad , \forall g \varepsilon C_o'(\Omega) .$$

É imediato que (1.1) $\Rightarrow$ (1.2) , onde

(1.2) $$|\mathrm{graph}_{\mathrm{suppg}}\ f| \leq |\mathrm{graph}_{\mathrm{suppg}}\ (f+tg)| \quad , \forall g \varepsilon C_o^1(\Omega) \quad , \forall t \varepsilon \mathbb{R}.$$

(1.3) $$\frac{d}{dt}\Big[|\mathrm{graph}_{\mathrm{suppg}}\ (f+tg)|\Big]_{t=o} = \int_\Omega \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \chi_i} \frac{\partial g}{\partial \chi_i}}{\sqrt{1+ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial \chi_i}\right)^2}}\, d\chi = o, \quad \forall g \varepsilon C_o^1(\Omega).$$

A igualdade (1.3) se lê: <u>A primeira variação da medida do gráfico de f é nula</u>. Este fato implica, graças a alguns trabalhos clássicos de Morrey[1] e Hopf, que f é analítica sobre Ω, isto é, $f \in C^{w}(\Omega)$.

Em (1.3) podemos integrar por partes e obtemos

$$(1.4) \qquad \int_{\Omega} g(\chi) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \chi_i} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial \chi_i}}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial \chi_i})^2}} \right) d\chi = 0 \ , \ \forall g \in C_o^1(\Omega) \ .$$

De (1.4) obtemos finalmente,

$$(1.5) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \chi_i} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial \chi_i}(\chi)}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial \chi}(\chi))^2}} \right) = 0 \quad , \quad \forall \chi \in \Omega.$$

A convexidade da função de t, $|\text{graph}_{\text{suppg}} (f+tg)|$, é expressa por

$$(1.6) \qquad \frac{d^2}{dt^2}(|\text{graph}_{\text{suppg}} (f+tg)|) =$$

$$= \int_{\Omega} \frac{\left[1 + \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial (f+tg)}{\partial \chi_i})^2\right] \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial g}{\partial \chi_i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f+tg)}{\partial \chi_i} . \frac{\partial g}{\partial \chi_i} \right)^2}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial (f+tg)}{\partial \chi_i})^2}} \, d\chi \geq 0$$

Podemos verificar facilmente as seguintes implicações:

(1.5) $\Rightarrow$ (1.4) $\Rightarrow$ (1.3) e (1.3) com (1.6) $\Rightarrow$ (1.2) , o que nos permitem dizer que uma função $f \in C^{\omega}(\Omega)$ tem gráfico de medida mínima se, e somente se, a equação (1.5) for verificada. A equação (1.5) é denominada <u>equação das superfícies mínimas</u>.

(1) Morrey, C.B. Jr. Multiple Integral Problems in the Calculus of Variations and related Topics, Amm. Sc. Norm. Sup. Pisa (1960).

Medida do gráfico de uma função $f \varepsilon L^1_{loc}(\Omega)$

Seja, por definição

$$(1.7) \qquad |\mathrm{graph}_\Omega f| = \sup_a \{ \int_\Omega [a_o(\chi) \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i(\chi)}{\partial \chi_i}] d\chi ; a \varepsilon [C^1_o(\Omega)]^{n+1} \; , \; |a(\chi)| \leq 1 \; \forall \chi \}$$

Esta definição é estudada em: "Superfici Cartesiane generalizzate e insiemi di Perimetro finito sui prodotti Cartesiani", de M.Miranda, in Annali S.N.S. Pisa, 1964.

Um exercício interessante, não difícil, é verificar que a definição (1.7) concide com a integral

$$\int_\Omega \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n (\frac{\partial f}{\partial \chi_i}(\chi))^2} \, d\chi \text{ , no caso em que } f \varepsilon C^1(\Omega).$$

Um pouco mais trabalhoso é verificar que, no caso em que $f \varepsilon C(\Omega)$, a definição (1.7) coincide com a definição de Lebesgue, i.é,

$$\inf \{ \lim_{h\to\infty} \inf \int_\Omega \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n (\frac{\partial f_h}{\partial \chi_i})^2} \, d\chi \; ; \; f_h \varepsilon C^1(\Omega), \; f_h \to f \text{ localmente, uniformemente sobre } \Omega \}$$

Funções de $L^1_{loc}(\Omega)$ com gráfico de medida finita

A condição

$$(1.8) \qquad \sup\{ \int_\Omega [a_o(\chi) + f(\chi) \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial \chi_i}(\chi)] d\chi \; ; \; a(\chi) \varepsilon [C^1_o]^{n+1} \; , \; |a(\chi)| \leq 1 \; \forall \chi \} < +\infty$$

equivale , obviamente, às n+1 condições:

$$(1.9)\quad \begin{cases} \sup\{\displaystyle\int_\Omega f(\chi)\frac{\partial a(\chi)}{\partial \chi_i}d\chi \ ;\ a(\chi)\varepsilon C_o^1(\Omega)\ ,\ |a(\chi)|\leq 1\ \forall\chi\}<+\infty\ , \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i=1,2,\ldots,n\ . \\ \text{med}\ \Omega < +\infty\ . \end{cases}$$

Pelo Teorema de Riesz, sobre representação dos funcionais lineares contínuos, as n primeiras condições (1.9) equivalem à existência das n medidas relativas [2] $\mu_1,\ldots,\mu_n$ com variação total finita sobre Ω tais que

$$(1.10)\quad \int_\Omega f(\chi)\ \frac{\partial a(\chi)}{\partial\chi_i}d\chi\ = -\int_\Omega\ a(\chi)d\mu_i(\chi)\ \ ,\ \ \forall a\varepsilon C_o^1(\Omega)\ .$$

Podemos pois dizer que as condições (1.9), i.é, $f\varepsilon L^1_{loc}(\chi)$ com gráfico de medida finita, equivalem a med $\Omega < +\infty$ e a existência de n medidas relativas de variações totais finita sobre Ω, $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$ verificando (1.10).

Observamos que (1.10) são frequentemente ditas do seguinte modo: μ_i são as derivadas primeiras no sentido das distribuições de f.

Diremos que $f\varepsilon L^1_{loc}(\Omega)$ tem <u>gráfico de medida mínima</u> se vale

$$(1.11)\quad \begin{cases} |\text{graph}_\Omega\ f| < +\infty \\ |\text{graph}_\Omega\ f| \leq |\text{graph}_\Omega(f+g)|\ \ ,\ \ \forall g\varepsilon L_o^1(\Omega) \end{cases}$$

O seguinte resultado de regularidade se encontra demonstrado no artigo: "Un principio di massimo forte...", de M. Miranda in Rend. Sem. Mat. Padova, 1971:

---

(2) uma medida relativa com variação total finita sobre Ω é uma função real definida sobre os conjuntos de Borel de Ω e enumeravelmente aditiva.

<u>Teorema</u>: Se $f\varepsilon L^1_{loc}(\Omega)$ tem gráfico de medida mínima finita em Ω, então $f\varepsilon C^{\omega}(\Omega)$, isto é, f é analítica em Ω.

Para a demonstração deste teorema se utiliza a majoração do gradiente das superfícies minimais (cf. E. Bombieri - E. De Giorgi - M. Miranda , in Arch. Rat. Mech. Anal., 1969) e seu resultado de regularidade para as fronteiras minimais de E. De Giorgi (1961) - (cf. E. De Giorgi - F. Colombini - L.C. Piccinini: "Frontiere orientate di misura minima e questioni collegate", Pisa 1972).

<u>Observamos</u> que em (1.11) escrevemos $\forall g\varepsilon L^1_o(\Omega)$, i,e, $g\varepsilon L^1(\Omega)$ com suporte compacto em Ω, e isto não é equivalente a (1.11) com $\forall g\varepsilon C^1_o(\Omega)$ senão vejamos, seja a função de uma variável dada por

$$f(\chi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \chi<o \\ 1 & \text{se } \chi\geq o \end{cases} \quad , \text{ temos (exercício)}$$

$$|\underset{(-1,1)}{\text{graph}}\ f| \leq |\underset{(-1,1)}{\text{graph}}\ (f+g)| \quad , \forall g\varepsilon C^1_o[(-1,1)] \ ,$$

enquanto que, não vale

$$|\underset{(-1,1)}{\text{graph}}\ f| \leq |\underset{(-1,1)}{\text{graph}}\ (f+g)| \quad , \forall g\varepsilon L^1_o((-1,1)).$$

2. <u>Problema de Dirichlet para a equação da superfície mínima</u>

Dado um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e uma função $g\varepsilon C(\partial\Omega)$ provar a existência e eventualmente a unicidade de uma função $f\varepsilon C(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ tal que

$$(2.1) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\chi_i} \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial\chi_i}(\chi)}{\sqrt{1 + |\text{graf } f(\chi)|^2}} \right) = 0 \quad , \forall\chi\in\Omega$$

$$(2.2) \qquad f(\chi) = g(\chi) \quad , \forall\chi\varepsilon\partial\Omega \ .$$

Este problema pode não ter solução mesmo que Ω e g sejam bem regulares. Vejamos um exemplo em que isto acontece:

sejam

$$\Omega = \{\chi \varepsilon \mathbb{R}^n \ ; \ o<a<|\chi|<b<+\infty\}$$

$$g(\chi) = \begin{cases} A = \text{const.} & , \forall |\chi| = a \\ B = \text{const.} & , \forall |\chi| = b \end{cases}$$

Para tais Ω e g, suponhamos que exista $f \varepsilon C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ satisfazendo (2.1) e (2.2). Para uma tal f tem-se a seguinte:

<u>Observação 1</u>:

$$(2.3) \qquad |\text{graph}_\Omega\ f| \leq 2(|A| + |B|)b^{n-1}n\omega_n + b^n\omega_n < +\infty \ .$$

Para provar a desigualdade (2.3) notemos, antes de tudo que o princípio clássico do máximo[(3)] mostra que:

$$\max_{\bar{\Omega}}|f| = \max_{\partial\Omega}|f| = \max(|A| , |B|) \leq |A| + |B| .$$

Para todo $\varepsilon \in (0, \frac{b-a}{2})$ tem-se,

dado $\Omega_\varepsilon = \{\chi \in \mathbb{R}^n \ ; \ a+\varepsilon<|\chi|<b-\varepsilon\}$, que $|\text{graph}_{\Omega_\varepsilon} f|<+\infty$.

De fato,

A função de t

$|\text{graph}_{\Omega_\varepsilon} f + t(\varphi - f)|$, φ finito e $\varphi = f$ sobre $\partial\Omega_\varepsilon$ e

$|\text{graph}_{\Omega_\varepsilon} \varphi| < +\infty$, é convexa e estacionária, isto é,

(3) Courant-Hilbert; Methods of Math. Physics, Vol II, (1966 - pag. 326).

$$\frac{d}{dt}\left|\underset{\Omega_\varepsilon}{\text{graph}}\ (f+t(\varphi-f))\right|_{t=0} = \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\sum_1^n \frac{\partial f}{\partial \chi_i}\,\frac{\partial(\varphi-f)}{\partial \chi_i}}{\sqrt{1+\sum_1^n\left(\frac{\partial f}{\partial \chi_i}\right)^2}}\, d\chi = o \Rightarrow$$

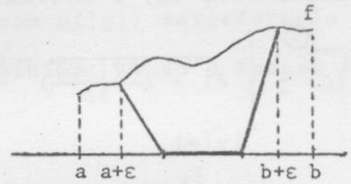
$\Rightarrow$

(2.4) $\quad \left|\underset{\Omega_\varepsilon}{\text{graph}}\ f\right| \leq \left|\underset{\Omega_\varepsilon}{\text{graph}}\ \varphi\right|\ ,\ \forall\varphi\ ,\ \varphi = f \text{ sobre } \partial\Omega_\varepsilon$.

Seja

$$\varphi_\delta(\chi) = \begin{cases} f(\chi) & \text{se } \ |\chi| = a+\varepsilon\ ,\ |\chi| = b-\varepsilon \\ 0 & \text{se } \ a+\varepsilon+\delta<|\chi|<b-\varepsilon-\delta \\ \text{linear em } a+\varepsilon<|\chi|<a+\varepsilon+\delta\ ,\ b-\varepsilon-\delta<|\chi|<b-\varepsilon \end{cases}$$

com $\quad \delta \in (o, \frac{b-a-2\varepsilon}{2})$



De (2.4), temos

(2.5) $\quad \left|\underset{\Omega_\varepsilon}{\text{graph}}\ f\right| \leq \lim_{\delta\downarrow o} \left|\underset{\Omega_\varepsilon}{\text{graph}}\ \varphi_\delta\right| \leq 2(|A|+|B|)b^{n-1}n\omega_n + b^n\omega_n$

De (2.5) se obtem (2.3), fazendo $\varepsilon\downarrow o$.

<u>Observação 2</u>:

De (2.3) segue, com a consideração usual sobre a convexidade da função de t,

$G(t) = \left|\underset{\Omega}{\text{graph}}\ (f + t(\varphi-f))\right|$, para um $\varphi = f$ sobre $\partial\Omega$, φ fixado, que

(2.6) $\quad \left|\underset{\Omega}{\text{graph}}\ f\right| \leq \left|\underset{\Omega}{\text{graph}}\ \varphi\right|\ ,\ \forall\varphi : \varphi = f \text{ sobre } \partial\Omega$.

<u>Observação 3:</u>

(f depende somente de $|\chi|$)

Consideremos, para $a \leq \rho \leq b$ (4)

$$\phi(\rho) = \frac{\rho^{1-n}}{n\omega_n} \int_{|\chi|=\rho} f(\chi)\, dH_{n-1} = \frac{1}{n\omega_n} \int_{|\chi|=1} f(\rho\chi)\, dH_{n-1}$$

Temos que

$$\begin{cases} \phi(a) = A \\ \phi(b) = B \end{cases} \quad \text{e}$$

$$(2.7) \qquad \phi'(\rho) \int_{|\chi|=1} \frac{\partial f(\chi\rho)}{\partial\rho} \cdot \frac{d\, H_{n-1}}{n\omega_n}, \quad \forall \rho \in (a,b).$$

Desde que a função $\sqrt{1+\phi'^2(\rho)}$ é convexa, se tem

$$(2.8) \qquad \sqrt{1+\phi'^2(\rho)} \overset{(5)}{\leq} \int_{|\chi|=1} \sqrt{1+\left(\frac{\partial f(\chi\rho)}{\partial\rho}\right)^2}\, \frac{d\, H_{n-1}}{n\omega_n}, \quad \forall \rho;\ a<\rho<b\ .\ .$$

Logo, temos

$$(2.9) \qquad \sqrt{1+\phi'^2(\rho)} \leq \int_{|\chi|=1} \sqrt{1+|\operatorname{grad} f(\chi\rho)|^2}\, \frac{d\, H_{n-1}}{n\omega_n}$$

---

(4) H_{n-1} indica a medida n-1-dimensional e $\omega_n = \operatorname{med}\{\chi \in \mathbb{R}^n;\ |\chi| \leq 1\}$

então

$$n\omega_n = H_{n-1}(\{\chi \in \mathbb{R}^n :\ |\chi| = 1\})$$

(5) Se $F(t) = \sqrt{1+t} \Rightarrow F\left(\int_{|\chi|=1} \frac{\partial f}{\partial\rho} \frac{d\, H_{n-1}}{n\omega_n}\right) \leq \int_{|\chi|=1} F\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) \frac{d\, H_{n-1}}{n\, \omega_n}$

pois se F é conexa, $0 \leq \lambda_i$, $i=1,2,\ldots n$ e

$$\sum^{n} \lambda_i = 1 \Rightarrow F\left(\sum^{n} t_i\lambda_i\right) \leq \sum^{n} \lambda_i F(t_i).$$

Integrando (2.9) sobre Ω, se tem

$$(2.10) \qquad |\operatorname{graph}_{\Omega} \phi| = \int_a^b \sqrt{1+\phi'^2(\rho)}\, n\omega_n \rho^{n-1}\, d\rho \le \int_a^b \sqrt{1+|\operatorname{grad} f(\chi\rho)|^2}\, dH_{n-1}$$

$$\| \qquad |\operatorname{graph}_{\Omega} f|$$

(2.10) juntamente com (2.6), implicam

$$(2.11) \qquad |\operatorname{graph}_{\Omega}\phi| \le |\operatorname{graph}_{\Omega}\varphi|, \ \forall \varphi : \varphi = \phi \text{ sobre } \partial\Omega,$$

onde ϕ é uma solução simétrica do problema.

Dessa maneira a hipótese pode ser reformulada, isto é,

$\exists\, \phi(\rho) \varepsilon\, C^2((a,b)) \cap C([a,b])$,

com $\phi(a) = A$ e $\phi(b) = B$ com $\phi(|\chi|)$ satisfazendo (2.1), isto é, a equação de superfície mínima, sendo ϕ função sòmente de $|\chi| = \rho$.

Assim,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \chi_i}\left(\frac{\phi'(\rho)\frac{\chi_i}{\rho}}{\sqrt{1+\phi'^2(\rho)}}\right) = \frac{\sum \phi''(\rho)\frac{\chi_i^2}{\rho_2}}{\sqrt{1+\phi'^2(\rho)}} + \frac{\phi'\frac{n}{\rho}}{\sqrt{1+\phi'^2(\rho)}} -$$

$$- \frac{\sum \phi \frac{\chi_i^2}{\rho^3}}{\sqrt{1+\phi'^2(\rho)}} - \frac{\sum \phi'^2 \frac{\chi_i}{\rho 2}\phi''}{\sqrt{1+\phi'^2(\rho)}^3} = \frac{1+\phi'^2-\phi'^2}{\sqrt{1+\phi'^2(\rho)}^3}\phi'' + \frac{\phi'\frac{n-1}{\rho}}{\sqrt{1+\phi'^2(\rho)}} \Rightarrow$$

$$(2.12) \qquad \rho\phi'' + (n-1)\,\phi'(1+\phi'^2) = 0$$

um cálculo elementar mostra que se deve ter

$$(2.13) \qquad \frac{\phi'(\rho)}{\sqrt{1+\phi'^2(\rho)}} = \frac{k}{\rho^{n-1}} \quad (\text{com } k \text{ constante, } |k| \le a^{n-1})$$

$$\Rightarrow (2.14)\ |\phi'| = \frac{|k|}{\sqrt{\rho^{2(n-1)}-k^2}} \quad \Rightarrow (2.15) \int_a^b |\phi'(\rho)|\,d\rho =$$

$$= \int_a^b \frac{|k|}{\sqrt{\rho^{2(n-1)}-k^2}}\,d\rho\ .$$

Desde que $|k| \leq a^{n-1}$, segue

$$(2.16) \qquad \int_a^b |\phi'(\rho)|\,d\rho \leq \int_a^b \frac{a^{n-1}}{\sqrt{\rho^{2(n-1)}-a^{2(n-1)}}}\,d\rho < +\infty$$

Portanto, condição necessária de solubilidade do problema de Dirichlet sobre o aberto $\Omega = \{\chi\varepsilon\mathbb{R}^n : 0<a<|\chi|<b<+\infty\}$ com dada

$$g(\chi) = \begin{cases} A\ \varepsilon\ \mathbb{R}\ , & |\chi| = a \\ B\ \varepsilon\ \mathbb{R}\ , & |\chi| = b\ , \end{cases}$$

é que

$$(2.17) \qquad |A-B| \leq \int_a^b \frac{a^{n-1}}{\sqrt{\rho^{2(n-1)}-a^{2(n-1)}}}\,d\rho < +\infty \quad !!$$

<u>Teorema 0</u> - Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e $g:\partial\Omega \to \mathbb{R}$ tal que vale B.S.C. (Bounded Scope condition). Então, existe uma única $f\varepsilon Lip$, $f(\chi) = g(\chi)$ $\forall\chi\varepsilon\partial\Omega$, com

$$|graph_\Omega f| \leq |graph_\Omega \varphi|\ ,\ \forall\varphi\varepsilon Lip\ ,\ \varphi(\chi) = g(\chi),\ \chi\varepsilon\partial\Omega$$

<u>Teorema 1</u> - Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e $g:\partial\Omega \to \mathbb{R}$ tal que vale a B.S.C. Então, existe uma única $f\varepsilon Lip\cap C^\omega(\Omega)$ com $f(\chi) = g(\chi)$, $\forall\chi\varepsilon\partial\Omega$ e

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial\chi_i}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial\chi_i}(\chi)}{\sqrt{1+|grad\ f(\chi)|^2}}\right) = 0 \quad \forall\chi\varepsilon\Omega\ .$$

Explicação: ① B.S.C. para g:

$$\forall \chi \varepsilon \partial\Omega \ , \ \exists\, a(\chi) \ \varepsilon \mathbb{R}^n \ , \ b(\chi) \ \varepsilon \mathbb{R}^n \ \text{ com}$$

$$g(\chi) + b(\chi)(y-\chi) \leq g(y) \leq g(\chi) + a(\chi)(y-\chi) \quad \forall y \varepsilon \partial\Omega$$

e $$\max\{\sup_{\chi\varepsilon\partial\Omega}|a(\chi)| \ , \ \sup_{\chi\varepsilon\partial\Omega}|b(\chi)|\} = K < +\infty$$

O gráfico de g está sempre compreendido entre 2 planos com coeficientes angulares $|a(\chi)| < k$ e $|b(\chi)| < k$.

② $$f \varepsilon \mathrm{Lip} \Leftrightarrow \sup_{\chi,y} \frac{|f(\chi) - f(y)|}{|\chi - y|} < +\infty$$

③ Seja L(y) uma função linear com $L(y) \geq g(y)$ $\forall y \varepsilon \partial\Omega$; Seja $\varphi \varepsilon \mathrm{Lip}$ com $\varphi(y) = g(y)$ $\forall y \varepsilon \partial\Omega \Rightarrow (\varphi \cap L)(\chi) = \min(\varphi(\chi), L(\chi))$ se tem $\varphi \cap L \ \varepsilon \ \mathrm{Lip}$ e $(\varphi \cap L)(y) = g(y)$ $\forall y \varepsilon \partial\Omega$ e ainda

$$|\mathrm{graph}_\Omega \varphi \cap L| \leq |\mathrm{graph}_\Omega \varphi|$$

Como consequência de ③, tem-se

$$\inf_{\substack{\varphi\varepsilon \mathrm{Lip} \\ \varphi = g \text{ em } \partial\Omega}} |\mathrm{graph}\ \varphi| = \inf_{\substack{\psi\varepsilon \mathrm{Lip} \\ \psi = g \text{ em } \partial\Omega \\ \psi \leq L}} |\mathrm{graph}\ \psi|$$

④ Seja $\ell(y)$ linear com $\ell(y) \leq g(y)$ $\forall y \varepsilon \partial\Omega \Rightarrow$

$$\inf_{\substack{\varphi \varepsilon \mathrm{lip} \\ \varphi = g \text{ em } \partial\Omega}} |\mathrm{graph}_\Omega \varphi| = \inf_{\substack{\psi \varepsilon \mathrm{Lip} \\ \psi = g \text{ em } \partial\Omega \\ \psi \geq \ell}} |\mathrm{graph}_\Omega \psi|$$

⑤

$$\inf_{\substack{\varphi \varepsilon \mathrm{Lip} \\ \varphi = g \text{ em } \partial\Omega}} |\mathrm{graph}\ \varphi| = \inf_{\substack{\psi \varepsilon \mathrm{Lip} \\ \ell \leq \psi \leq L \\ \psi = g \text{ em } \partial\Omega}} |\mathrm{graph}\ \psi|$$

⑥ B.S.C $\Rightarrow$ g contínua sobre $\partial\Omega$

B.S.C e g não linear $\Rightarrow$ $(a(\chi)-b(\chi)(y-\chi) \geq 0$ $\forall y \varepsilon \partial\Omega$ e $a(\chi) \not\Rightarrow b(\chi) \Rightarrow \Omega$ convexo.

g contínua e Ω convexo $\not\Rightarrow$ B.S.C.

<u>Lema 1</u> - $g \varepsilon C^2$ e Ω estritamente convexo $\Rightarrow$ B.S.C.

<u>Prova do lema 1:</u>

Fixado $\chi \varepsilon \partial\Omega$, suponhamos $\chi = 0$, $\gamma(0) = (0,0,\ldots,0,1)$, $g(0) = 0$.

Sabemos que $y \varepsilon \partial\Omega$,

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(0)}{\partial \chi_i} y_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 g(\xi)}{\partial \chi_i \partial \chi_j} y_i y_j$$

onde ξ é um ponto oportuno do segmento $(0,y)$

seja $a(0) = \left(\frac{\partial g(0)}{\partial \chi_1}, \ldots, \frac{\partial g(0)}{\partial \chi_{n-1}}, a_n(0)\right)$

$b(0) = \left(\frac{\partial g(0)}{\partial \chi_1}, \ldots, \frac{\partial g(0)}{\partial \chi_{n-1}}, b_n(0)\right)$

$$\begin{cases} a_n(0) = \left|\dfrac{\partial g(0)}{\partial \chi_n}\right| + \dfrac{n^2}{\varepsilon} \max\limits_{\xi\varepsilon\bar{\Omega}} \left|\dfrac{\partial^2 g}{\partial \chi_i \partial \chi_j}(\xi)\right| \\ b_n(0) = - a_n(0) \end{cases}$$

com estas considerações preliminares, podemos fazer mais facil mente a seguinte demonstração:

Demonstração do Teorema 0:

1º Passo - Indiquemos com $W_k = \{w(\chi)\varepsilon \mathrm{Lip}_k \ ; \ w(\chi) = g(\chi) \ \forall \chi\varepsilon\partial\Omega\}$

$W_k \neq \phi$ pois $\inf\{L(\chi): L(\chi)$ é linear, $L(\chi)\varepsilon\mathrm{Lip}_k \ , \ L(\chi) \geq g(\chi) \ \forall\chi\varepsilon\partial\Omega\}$

é um elemento de W_k.

Consideremos $\inf\limits_{\hat{w}\varepsilon W_k} |\mathrm{graph}_\Omega w|$ e seja $w_j \in W_k (j = 1,2,\ldots)$

tal que $|\mathrm{graph}_\Omega w_j| \xrightarrow[j\to\infty]{} \inf\limits_{w\varepsilon W_k} |\mathrm{graph}_\Omega w|$

Do Teorema de Ascoli-Arzela se tem que existe $\{\bar{j}_s\}_{s} = 1,2\ldots$

tal que $w_{\bar{j}_s} \to \bar{w}$ uniformemente em Ω.

Tem-se que $\bar{w} \ \varepsilon \ W_k$

com $|\mathrm{graph}_\Omega \bar{w}| = \sup\{\displaystyle\int_\Omega (\bar{w}(\chi) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi_i}{\partial\chi_i} + \psi_o)d\chi \ ; \ \psi\varepsilon[C_o^1(\Omega)]^{n+1}, \ , \ |\psi(\chi)| \leq 1\}$

Obviamente vale, para todo ψ fixado,

$$\int_\Omega (w(\chi) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi_i}{\partial\chi_i} + \psi_o)d\chi = \lim_{s\to\infty} \int_\Omega (w_{\bar{j}_s} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi_i}{\partial\chi_i} + \psi_o)d\chi$$

e portanto

$$\int_{\Omega} (\bar{w}(\chi) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi_i}{\partial\chi_i} + \psi_o)d\chi \le \liminf_{s\to\infty} \sup\{\int_{\Omega} (w_{j_s} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\psi_i}{\partial\chi_i} + \psi_o)d\chi \;,$$

$$\psi\varepsilon[C_o^1(\Omega)]^{n+1} \;,\; |\psi(\chi)| \le 1\} = \liminf_{s\to\infty} |\mathrm{graph}_{\Omega} w_{j_s}|$$

Finalmente, se tem

$$|\mathrm{graph}_{\Omega}\bar{w}| \le \liminf_{s\to\infty} |\mathrm{graph}_{\Omega}\, w_{\bar{j}_s}| = \inf_{w\varepsilon W_k} |\mathrm{graph}_{\Omega}\, w|$$

donde

$$|\mathrm{graph}_{\Omega}\, \bar{w}| = \inf_{w\varepsilon W_k} |\mathrm{graph}_{\Omega}\, w|$$

<u>2º Passo</u>: - Consideremos W_{k+1} e indiquemos com $\bar{\bar{w}}$ uma função tal que

$$\bar{\bar{w}}\ \varepsilon\ W_{k+1} \;,\; |\mathrm{graph}_{\Omega}\, \bar{\bar{w}}| = \inf_{w\varepsilon W_{k+1}} |\mathrm{graph}_{\Omega}\, w|$$

Para o cálculo de

$$\sup_{\substack{\chi\varepsilon\Omega \\ y\varepsilon\Omega}} \frac{|\bar{\bar{w}}(\chi)-\bar{\bar{w}}(y)|}{|\chi-y|}$$ vale a seguinte observação de J. Van Neumann

(cf. Rado Eig. di Math 1933, the Plateau Problem.)

$$\sup_{\substack{\chi\varepsilon\Omega \\ y\varepsilon\Omega}} \frac{|\bar{\bar{w}}(\chi)-\bar{\bar{w}}(y)|}{|\chi-y|} = \sup_{\substack{\chi\varepsilon\partial\Omega \\ y\varepsilon\Omega}} \frac{|\bar{\bar{w}}(\chi)-\bar{\bar{w}}(y)|}{|\chi-y|}$$

A B.S.C. implica então que $\bar{\bar{w}}\ \varepsilon\ \mathrm{Lip}_k$, e portanto segue-se

$$|\mathrm{graph}_{\Omega}\, \bar{\bar{w}}| = \inf_{w\varepsilon W_{k+1}} |\mathrm{graph}_{\Omega}\, w|$$

<u>3º Passo</u> - Seja $w \in Lip$, $w(\chi) = g(\chi) \quad \forall \chi \in \partial\Omega$.

A função de t : $|graph_\Omega (\bar{w} + t(w-\bar{w}))|$ tem seu mínimo local para $t=0$.

(De fato, $\bar{w} + t(w-\bar{w}) \in Lip_{k+1}$ para $|t|$ suficientemente pequeno) - como a função é convexa, tem mínimo absoluto para $t=0$, isto é,

$$|graph_\Omega \bar{w}| = \inf_{\substack{w \in Lip \\ w(\chi)=g(\chi)\ \forall \chi \in \partial\Omega}} |graph_\Omega w|$$

<u>4º Passo</u> - (Unicidade) Se w_1 e w_2 são duas soluções do problema, isto é,

$$w_1(\chi) = w_2(\chi) = g(\chi) \quad \forall \chi \in \partial\Omega \ , \quad w_1, w_2 \in Lip \quad \text{e}$$

$$|graph_\Omega w_1| = |graph_\Omega w_2| = \inf_{\substack{w \in Lip \\ w=g \text{ sobre } \partial\Omega}} |graph_\Omega w|$$

Consideremos $\dfrac{W_1 + W_2}{2}$, temos pela convexidade de $\sqrt{1+a^2}$

$$\left|graph_\Omega \frac{w_1 + w_2}{2}\right| = \int_\Omega \sqrt{1+\left|grad \frac{w_1 + w_2}{2}\right|^2}\, d\chi \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_\Omega \sqrt{1+|grad\, w_1|^2}\, d\chi + \frac{1}{2} \int_\Omega \sqrt{1+|grad\, w_2|^2}\, d\chi = \inf_{\substack{w \in Lip \\ w=g \text{ em } \partial\Omega}} |graph_\Omega w|$$

Desde que a desigualdade não pode ser estrita deve ter-se igualdade e portanto, para quase todo $\chi \in \Omega$:

$$\sqrt{\left|\frac{grad\ (w_1+w_2)}{2}\right|^2 + 1} = \frac{1}{2} \sqrt{1+|grad\, w_1(\chi)|^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1+|grad\, w_2(\chi)|^2}$$

$\Rightarrow$ $grad\, w_1(\chi) = grad\, w_2(\chi)$ para quase todo $\chi \in \partial\Omega$.

Finalmente, desde que $w_1(\chi) = w_2(\chi) = g(\chi) \quad \forall \chi \in \partial\Omega \Rightarrow$

$w_1(\chi) = w_2(\chi) \quad \forall \chi \in \Omega$.

cqd.

Lema 2 - Sejam $\varphi, \psi \in \mathrm{Lip}_M$, Ω aberto limitado e satisfazendo:

① $\quad |\mathrm{graph}_\Omega \varphi| \leq |\mathrm{graph}_\Omega f|$, $\forall f \in \mathrm{Lip}_M$, $f = \varphi$ sobre $\partial\Omega$.

② $\quad |\mathrm{graph}_\Omega \psi| \leq |\mathrm{graph}_\Omega f|$, $\forall f \in \mathrm{Lip}_M$, $f = \psi$ sobre $\partial\Omega$.

③ $\quad \varphi \geq \psi$ sobre $\partial\Omega$.

$\Rightarrow$ d) $\varphi \geq \psi$ sobre Ω .

Prova: Consideremos as funções $\varphi \cup \psi$ e $\varphi \cap \psi$ definidas por

$$(\varphi \cup \psi)(\chi) = \max(\varphi(\chi), \psi(\chi))$$

$$(\varphi \cap \psi)(\chi) = \min(\varphi(\chi), \psi(\chi))$$

Por ① e ③ , temos

⑤ $\quad |\mathrm{graph}_\Omega \varphi| \leq |\mathrm{graph}_\Omega(\varphi \cup \psi)|$

Por ② e ③ , temos

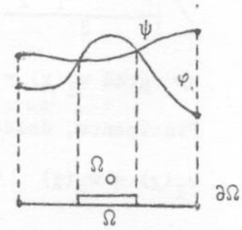
⑥ $\quad |\mathrm{graph}_\Omega \varphi| \leq |\mathrm{graph}_\Omega(\varphi \cap \psi)|$

Se indicarmos com Ω_o o aberto $\{\chi \in \Omega \mid \varphi(\chi) < \psi(\chi)\}$, teremos

⑦ $$|\mathrm{graph}_\Omega(\varphi \cup \psi)| = \int_{\Omega_o} \sqrt{1+|\mathrm{grad}\ \psi|^2}\, d\chi + \int_{\Omega-\Omega_o} \sqrt{1+|\mathrm{grad}\ \varphi|^2}\, d\chi$$

⑧ $$|\mathrm{graph}_\Omega(\varphi \cap \psi)| = \int_{\Omega} \sqrt{1+|\mathrm{grad}\ \varphi|^2}\, d\chi + \int_{\Omega-\Omega_o} \sqrt{1+|\mathrm{grad}\ \psi|^2}\, d\chi$$

Combinando ⑤ , ⑥ , ⑦ e ⑧ , teremos



⑨ $$\int_{\Omega_o} \sqrt{1+|\mathrm{grad}\ \varphi|^2}\, d\chi = \int_{\Omega_o} \sqrt{1+|\mathrm{grad}\ \psi|^2}\, d\chi$$

7 $\Rightarrow$ ⑩ $\quad |\mathrm{graph}_\Omega(\varphi \cup \psi)| = |\mathrm{graph}_\Omega \varphi|$

Indiquemos agora com ϕ a função $\frac{\varphi + \varphi \cup \psi}{2} \Rightarrow \phi \in Lip_M$,

$\phi = \varphi$ sobre $\partial\Omega$, logo

(11) $$|graph_{\Omega}\,\varphi| \leq |graph_{\Omega}\,\phi|$$

Por outro lado, pela convexidade da função $F(a) = \sqrt{1+|a|^2}$ definida para todo $a \in \mathbb{R}^n$, temos

(12) $$\sqrt{1+|grad\ \phi(\chi)|^2} \leq \frac{1}{2}\sqrt{1+|grad\ \varphi(\chi)|^2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+|grad(\varphi\cup\psi)(\chi)|^2}$$

Para quase todo $\chi \in \Omega$ a desigualdade é estrita (<) se $grad\,\varphi(\chi) \neq grad(\varphi\cup\psi)(\chi)$

Integrando (12) sobre Ω , obtemos

(13) $$|graph_{\Omega}\,\phi| \leq \frac{1}{2}|graph_{\Omega}\,\varphi| + \frac{1}{2}|graph_{\Omega}(\varphi\cup\psi)| = |graph_{\Omega}\,\varphi|$$

de (11) segue-se então

(14) $|graph_{\Omega}\,\psi| = |graph_{\Omega}\,\varphi| \Rightarrow$ que em (12) deve valer a igualdade para quase todo $\chi \in \Omega \Rightarrow$

(15) $$grad\ \varphi(\chi) = grad(\varphi\cup\psi)(\chi)\ , \quad p/\ q.\ todo\ \chi \in \Omega\ .$$

Portanto, desde que $\varphi(\chi) = (\varphi\cup\psi)(\chi)$ para $\chi\in\partial\Omega$, se tem

$$\varphi(\chi) = (\varphi\cup\psi)(\chi) \quad \forall\chi\in\Omega\ ,$$

isto é $$\varphi(\chi) \geq \psi(\chi) \quad \forall\chi\in\Omega\ .$$

cqd.

Corolário (J.V. Neumann) -

Seja $\varphi \in Lip_M$, Ω aberto limitado e

$|graph_{\Omega}\varphi| \leq |graph_{\Omega}\,f|$, $\forall f \in Lip_M$, $f = \varphi$ sobre $\partial\Omega$

$\Rightarrow$ (16) $$\sup_{\substack{\chi\in\bar{\Omega}\\ y\in\bar{\Omega}\\ \chi\neq y}} \frac{|\varphi(\chi)-\varphi(y)|}{|\chi-y|} = \sup_{\substack{\chi\in\partial\Omega\\ y\in\bar{\Omega}\\ \chi\neq y}} \frac{|\varphi(\chi)-\varphi(y)|}{|\chi-y|}$$

Prova: Basta verificar que se $\zeta \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, então

$$(17)\quad \sup_{\substack{\chi\in\bar\Omega\\(\chi+\zeta)\in\bar\Omega}} (\varphi(\chi)-\varphi(\chi+\zeta)) = \max(\sup_{\substack{\chi\in\partial\Omega\\ \chi+\zeta\in\bar\Omega}} (\varphi(\chi)-\varphi(\chi+\zeta)),\ \sup_{\substack{\chi\in\bar\Omega\\ \chi+\zeta\in\partial\Omega}} (\varphi(\chi)-\varphi(\chi+\zeta))$$

sejam:

$\Omega_\zeta = \{\chi \in \Omega \mid \chi+\zeta \in \Omega\}$ e $\varphi_\zeta(\chi) = \varphi(\chi+\zeta)$. Temos de ,

$$(18)\quad |\text{graph}_{\Omega_\zeta} \varphi| \le |\text{graph}_{\Omega_\zeta} f| \ ,\ \forall f\in Lip_M \ ,\ f = \varphi \text{ sobre } \partial\Omega_\zeta \ .$$

$$(19)\quad |\text{graph}_{\Omega_\zeta}(\varphi_\zeta + C_\zeta)| \le |\text{graph}_{\Omega_\zeta} f|,\ \ \forall f\in Lip_M \ ,\ f = \varphi_\zeta + C_\zeta \text{ sobre } \partial\Omega_\zeta \ .$$

Pelo lema 2, temos então (6) que

$$(20)\quad \varphi(\chi) \le \varphi_\zeta(\chi) + C_\zeta \ ,\ \ \forall\chi\in\Omega_\zeta \ ,\ \text{i,é} \ ,\quad (21)\quad \sup_{\substack{\chi\in\Omega\\ \chi+\zeta\in\Omega}} (\varphi(\chi)-\varphi_\zeta(\chi)) \le C_\zeta$$

cqd

Uma consequência do teorema 0 é a seguinte:

Teorema 2: - Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, aberto, e estritamente convexo, se $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$, então existe única $f \in Lip$, $f = g$ sobre ∂_Ω e

$$(1)\quad |\text{graph}_\Omega f| < |\text{graph}_\Omega \varphi| \ \ \forall\varphi\in Lip \ ,\ \varphi = g \text{ sobre } \partial_\Omega \ ;\ f\in C^W(\Omega) \ \text{ e}$$

$$(2)\quad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\chi_i}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial \chi_i}(\chi)}{\sqrt{1+|\text{grad } f(\chi)|^2}}\right) = 0 \quad \forall\chi\in\Omega \ .$$

---

(6) Observemos que $\varphi(\chi) \le \varphi_\zeta(\chi) + C_\zeta$ $\forall\chi\in\partial\Omega_\zeta$, uma vez que $\partial\Omega_\zeta = (\partial\Omega\cap\Omega_\zeta)\cup(\partial\Omega_\zeta\cap\Omega)$, isto é ,

$$\sup_{\chi\in\partial\Omega_\zeta} (\varphi(\chi)-\varphi_\zeta(\chi)) = \max(\sup_{\substack{\chi\in\partial\Omega\\ \chi+\zeta\in\Omega}} (\varphi(\chi)-\varphi(\chi+\zeta))\ ,\ \sup_{\substack{\chi\in\Omega\\ \chi+\zeta\in\partial\Omega}} (\zeta(\chi)-\varphi(\chi+\zeta))) = C_\zeta$$

Consideremos agora o caso $g \in C(\partial\Omega)$, sempre mantendo a hipótese Ω aberto, limitado e estritamente convexo. Podemos aproximar g uniformemente sobre $\partial\Omega$ por meio de polinômios (Teorema de Weierstrass) g_h .

Uma vez que obviamente $g_h \in C^2(\mathbb{R}^n)\ \forall h$, teremos que existe $f_h \in Lip$, $f_h = g_h$ sobre $\partial\Omega$ verificando (1) e (2).

O teorema provado na aula anterior implica, por outro lado, que

$$(3) \qquad \max_{\bar\Omega} |f_h - f_k| = \max_{\partial\Omega} |f_h - f_k| = \max_{\partial\Omega} |g_h - g_k|$$

portanto f_h converge uniformemente sobre $\bar\Omega$ para uma função $f \in C(\bar\Omega)$ verificando obviamente $f = g$ sobre $\partial\Omega$.

Um cálculo simples (v. "un teorema di esistensa e unicitã..." di Mario Miranda - in Ann. S.N.S. Pisa-1965 - pag. 240 formula (5.6)),

Mostra que (1) implica

$$(4) \qquad |\mathrm{graph}_\Omega\, f_h| \leq |\mathrm{graph}_\Omega\, \varphi| + C(\Omega) \max_{\partial\Omega} |\varphi - f_h| \quad \forall \varphi \in Lip ,$$

e portanto também:

$$(5) \qquad |\mathrm{graph}_\Omega\, f_h'| \leq |\mathrm{graph}_\Omega\, \varphi| + C(\Omega) \max_{\partial\Omega} |\varphi - f_h| \quad \forall \varphi \in C(\bar\Omega)$$

Se considerarmos $\varphi \in C(\bar\Omega)$, $\varphi = f$ sobre $\partial\Omega$ teremos, usando (5), juntamente com

$$(6) \qquad \liminf_{h\to\infty} |\mathrm{graph}_\Omega\, f_h| \geq |\mathrm{graph}_\Omega\, f'| \text{ , que vale}$$

$$(7) \qquad |\mathrm{graph}_\Omega\, f| \leq |\mathrm{graph}_\Omega\, \varphi|,\ \forall \varphi \in C(\bar\Omega) \text{ , } \varphi = f \text{ sobre } \partial\Omega.$$

O problema que neste ponto se coloca é saber se $f \in C^w(\Omega)$.

O seguinte teorema:

<u>Teorema</u> (Bombieri-De Giorgi - Miranda)(Arch-Rat. Mech. Anal. 1969)

"Se $f \in C^w(\Omega)$ verifica (2) então vale

$$(8)\qquad |\text{grad } f(\chi)| \leq C_1(h) \exp C_2(h) \left(\frac{\underset{\Omega}{\text{osc}}\, f}{\text{dist}(\chi,\partial\Omega)}\right) \quad \forall\chi\in\Omega ,$$

onde $C_1(n)$ e $C_2(n)$ são duas constantes dependendo apenas da dimensão n do espaço";

implica que a função f é localmente lipschitiana sobre Ω e portanto (De Giorgi ⑦) , temos que $f\in C^{w}(\Omega)$.

---

⑦ E, De Giorgi: Sulla differentiabilitá e l'analiticitá delle estremali degli integrali multipli regolari, Mem. Acc. Sciente, Torino (1957).