MEDIDAS E INTEGRAIS FUZZY

Rodney C. Bassanezi

RELATÓRIO TÉCNICO Nº 06/87

RESUMO. Apresentamos alguns conceitos básicos, definições e exemplos de Medidas Fuzzy e damos uma interpretação do valor subjetivo obtido com uma Integral Fuzzy. Enunciamos alguns resultados inerentes à representatividade dos F-funcionais por medidas fuzzy enfraquecidas na propriedade de continuidade por sequências monótonas de conjuntos.

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação
IMECC – UNICAMP
Caixa Postal 6065
13.081 - Campinas, SP
BRASIL

Janeiro – 1987

MEDIDAS E INTEGRAIS FUZZY

Rodney C. Bassanezi
UNICAMP - Brasil

INTRODUÇÃO

O conceito de *medida fuzzy* introduzido por Sugeno (1974) corresponde à forma mais adequada para expressar (medir) graus de incerteza, valores que dependem quase que exclusivamente da subjetividade de quem está medindo. Por exemplo, quando uma pessoa faz a avaliação de uma casa, ela considera muitos fatores simultaneamente: espaço, cor, equipamento, custo, distribuição dos aposentos, etc. - o peso de cada um desses fatores pode diferir de pessoa para pessoa e algumas partes de um determinado fator podem ser redundantes. Ainda, os pesos (valores) vão sendo refinados de acordo com sua experiência e aprendizagem.

Do ponto de vista histórico a preocupação em medir usando a subjetividade humana não é um problema recente: Bernoulli e Lambert já conheciam a diferença entre "probabilidade aleatória" e "probabilidade epistêmica" - No caso da aleatória usavam funções de conjuntos aditivas, lembrando que os fenômenos aleatórios são aqueles governados por um mecanismo randômico, repetitivo ou frequencial. Quando os fenômenos eram descritos fazendo uso somente de julgamentos subjetivos usavam probabilidades epistêmicas. De qualquer forma, tanto num caso como noutro o modelo matemático empregado era o mesmo: a *função de probabilidade* (e isto vem desde o tempo de Bayes e Laplace).

Quando se pesquisa inteligência artificial fica evidente que o uso de funções de probabilidades para descrever julgamentos subjetivos é inadequado e leva a resultados contraditórios. Neste caso, impor que a medida seja aditiva é uma condição muito forte e não é respeitada pelo tipo de fenômeno estudado (Shortliffe: "Computer based medical consultations, 1976 ou Szolovits - Pauker: categorical and probabilistic reasoning in medicine, artificial inteligence, 1978). Isto fornece a motivação para se trabalhar com as *medidas fuzzy*[1].

SHAFER: A mathematical theory of evidence, 1976, introduz a *teoria da evidência*[2] para resolver problemas de julgamento subjetivos expressando-os por meio de "graus de credibilidade".

Do ponto de vista matemático ambas as teorias são tratadas por meio de funções de conjunto monótonas em relação à inclusão, isto é, se

$$A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B).$$

Podemos também acrescentar no rol das medidas subjetivas o trabalho de Choquet: "Theory of capacities", (1953) onde descreve *capacidades* como funções de conjuntos definidas numa classe de subconjuntos compactos de um espaço topológico apropriado.

Cada uma dessas teorias cobre somente alguns aspectos de problema geral e nenhuma delas está contida nas restantes. Por exemplo, a medida de possibilidade é uma função de plausibilidade e não é uma medida fuzzy (mas é uma capacidade). Analogamente, nem toda medida fuzzy é uma função de credibilidade e ou plausibilidade (veja Banon [1]).

2. MEDIDAS FUZZY

Seja $X \neq \phi$ um conjunto e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra de subconjuntos de X. Seja $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, satisfazendo

1) $\mu(\phi) = 0$

2) Se $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ Não seria $\cup$?

3) $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots \Rightarrow \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$, $A_i \in \mathcal{A}$,

4) $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots \Rightarrow \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$, com

$\mu(A_1) < +\infty$, $A_i \in \mathcal{A}$.

Então, μ é dita uma *fuzzy medida* (veja Sugeno [6]).

OBSERVAÇÃO. Se m é a medida de Lebesgue definida em $\mathcal{A}$ e F é uma função monótona não decrescente (por exemplo, função de distribuição) tal que $F(0) = 0$ então, a função composta $\mu = Fm$ é uma medida fuzzy.

EXEMPLO 1. Função de *probabilidade básica*

$$p : 2^X \to [0,1] \quad (X \text{ finito})$$

satisfazendo:

i) $p(\phi) = 0$

ii) $\sum_{A \subset X} p(A) = 1.$

EXEMPLO 2. $Bel(A) = \sum_{B \subset A} p(B)$ mede a *credibilidade* total finita concentrada em A. Bel(A) deve satisfazer

i) $Bel(\phi) = 0$

ii) $Bel(X) = 1$

iii) $\forall n > 1, A_1, A_2 \ldots A_n \in 2^X \Rightarrow Bel(\cup A_i) = \sum_{I \subset \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{\|I\|+1} Bel(\cap A_i)$

Tendo uma função de credibilidade podemos recuperar uma probabilidade básica por

$$p(A) = \sum_{B \subset A} (-1)^{|A-B|} Bel(B).$$

EXEMPLO 3. *Função de Plausibilidade*

$$P\ell(A) = 1 - Bel(\bar{A}) = \sum_{\substack{B \subset X \\ A \cap B = \phi}} m(B)$$

Satisfaz

i) $P\ell(\phi) = 0$ e $P\ell(X) = 1$

ii) $P\ell(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P\ell(A_i) - \sum_{i<j} P\ell(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P\ell(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$

EXEMPLO 4. *Medida de Sugeno*: É uma medida fuzzy, satisfazendo também

5) $\mu(X) = 1$

6) Se $A \cap B = \phi \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) + \lambda\mu(A)\mu(B)$, $(\lambda > -1)$.

PROPOSIÇÃO 1. Seja $\mu : P(X) \to [0,1]$ uma medida de Sugeno,

a) μ é uma função de credibilidade se $\lambda > 0$;

b) μ é de plausibilidade se $\lambda < 0$;

c) se $\lambda = 0$, μ é denominada função de *credibilidade Bayesiana*.

(Vide Wierzchon: Fuzzy informations and decision Processes (1982)).

EXEMPLO 5. *Medida de possibilidade*: $\mu : P(X) \to [0,1]$, satisfazendo:

i) $\mu(\phi) = 0$;

ii) $\mu(A) \leq \mu(B)$, $\forall A, B \in P(X)$;

iii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) \vee \mu(B)$.

A medida de possibilidade não é uma medida fuzzy ! É usada para avaliação de diagnósticos médicos (Sanchez), em Pesquisa Operacional (Prade) e em sensibilidade de Ações e Decisões (Wierzchon).

3. INTEGRAIS FUZZY

As *integrais fuzzy* introduzidas por Sugeno em [6] são usadas para avaliar objetos fuzzy:

DEFINIÇÃO. Seja $X \neq \phi$, $f : X \to [0,1]$ e $\mu : P(X) \to [0,1]$ uma medida fuzzy. A integral fuzzy é definida por

$$\int_A h d\mu = \sup_{E \subset X} [\min_{x \in E} h(x) \wedge \mu(A \cap E)] =$$

$$= \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \wedge \mu(A \cap E)] = \sup_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \cap \mu(F_\alpha \cap A)] = \inf_{\alpha \in [0,1]} [\alpha \vee \mu(F_\alpha \cap A)]$$

onde $F_\alpha = \{x \in X : h(x) \geq \alpha\}$

OBSERVAÇÃO. Em termos de probabilidade tal integral avalia a *esperança fuzzy* (Sugeno).

EXEMPLO. Suponhamos que se queira avaliar um determinado objeto o do ponto de vista de um conjunto de critérios X.

f(x) é o *grau de satisfação* do qual é munido o objeto o se o critério x é considerado.

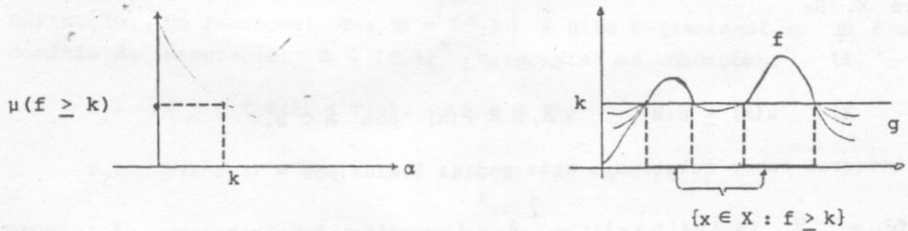
$\mu(x)$ mede por exemplo o *grau de importância* deste critério x.

Comparando as duas quantidades (no sentido do operador "min") obtemos um valor que pode ser interpretado como o *grau de concordância* entre possibilidades reais (expressa em termos de f(x)) por um lado, e nossas expectativas (expressa em termos de μ) por outro lado. Desta forma, a integração fuzzy pode ser entendida como a procura do máximo grau de concordância entre as duas tendências opostas.

O valor da integral fuzzy pode ser o "melhor valor pessimista" ou o "pior valor otimista" ("na pior das hipóteses").

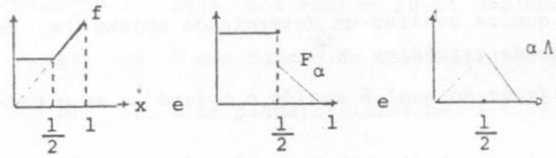
OBSERVAÇÃO. As integrais fuzzy são mais "insensíveis" comparadas às integrais de Lebesgue.

Se $k = \int_X f d\mu$ e $E_k = \{x \in X : f(x) \geq k\}$, então por toda g tal que $\{x \in X : g(x) \geq k\} = E_k$, temos $\int g\, d\mu = k$



EXEMPLO.

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1/2 \\ x & \text{se} \quad 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \rightarrow \int f\, d\, m = 1/2 \quad \text{(m: medida de Lebesgue)}$$



$\Rightarrow \sup\limits_{\alpha\in[0,1]} [\alpha \wedge \mu(F_\alpha)] = 1/2$

EXEMPLO 2. A razão de mistura de cores pode ser expressa por

$$\int_X h(x)\,d\mu, \quad \text{onde}$$

X : espaço das cores

h(x) : densidade de cores

μ : medida de densidade de cores.

4. TEOREMA DE REPRESENTAÇÃO PARA F-FUNCIONAIS

Nos trabalhos que temos desenvolvido juntamente com o prof. G. Greco levamos em consideração um enfraquecimento da definição de medida fuzzy (veja [3]).

DEFINIÇÃO. (Medida Fuzzy). Seja $X \neq \phi$ e $P(X)$ a família dos subconjuntos de X. A função de conjunto $\mu : P(X) \to [0,1]$ é uma fuzzy medida sobre X. Se

1) $\mu(\phi) = 0$ e $\mu(X) = 1$

2) $\mu(A) \leq \mu(B)$, $\forall A, B \in P(X)$ com $A \subset B$.

A integral fuzzy relativa a esta medida é dada por

$$\int_X f d\mu = \bigvee_{\alpha\in[0,1]} [\alpha \wedge \mu(\{f \geq \alpha\})] = \bigwedge_{\alpha\in[0,1]} [\alpha \vee \mu(\{f \geq \alpha\})], \quad \forall f \in [0,1]^X.$$

DEFINIÇÃO. Seja $\mathbb{B} \neq \phi$, $\mathbb{B} \subset [0,1]^X$ e $T : \mathbb{B} \to [0,1]$.

Um funcional T será dito *representável por uma fuzzy medida* se existe uma fuzzy medida $\mu : P(X) \to [0,1]$ tal que

$$T(f) = \int_X f d\mu \quad \text{para todo} \quad f \in \mathbb{B}.$$

Neste caso dizemos que μ representa T.

TEOREMA 1. *O conjunto das fuzzy medidas* M_T *que representam um funcional* T *(representável) tem um elemento mínimo* α_T *e um elemento máximo* β_T.

$$M_T = [\alpha_T, \beta_T] = \{\gamma \text{ fuzzy medidas sobre } X, \text{ tais que } \alpha_T \leq \gamma \leq \beta_T\}.$$

DEFINIÇÃO. Seja $X \neq \phi$ e $\mathbb{B} \subset [0,1]^X$; $\mathbb{B}$ é um fuzzy domínio de integração se

B_1) $1 \in \mathbb{B}$ (1 é a função identicamente igual a 1, definida sobre X).

B_2) $af \in \mathbb{B}$, $(f \wedge a) \in \mathbb{B}$ e $(f - f \wedge a) \in \mathbb{B}$, $\forall f \in \mathbb{B}$ e $a \in [0,1]$.

B_3) Se $(g \wedge a) \in \mathbb{B}$ e $(g - g \wedge a) \in \mathbb{B} \Rightarrow g \in \mathbb{B}$, $\forall g \in [0,1]^X$, $a \in [0,1]$.

PROPOSIÇÃO. *Se* $\mathbb{B}$ *é um fuzzy domínio de integração então*

$$f \vee (g \wedge a) \in \mathbb{B}, \quad \forall f, g \in \mathbb{B} \quad e \quad a \in [0,1].$$

DEFINIÇÃO. Um funcional $T : \mathbb{B} \to [0,1]$ é dito F-*funcional* se $\mathbb{B}$ é um domínio de integração, $\mathbb{B} \subset [0,1]^X$ e, satisfaz as condições:

T_1) $f \leq g \Rightarrow T(f) \leq T(g)$, $\forall f, g \in \mathbb{B}$

T_2) $T(f \vee a) = T(f) \vee a$, $f \in \mathbb{B}$ e $a \in [0,1]$.

PROPOSIÇÃO. *As condições* T_1 *e* T_2 *são equivalentes às*

T_3) $T(1) = 1$ *e* $T(0) = 0$

T_4) $T(f \vee (g \wedge a)) = T(f) \vee [T(g) \wedge a]$, $\forall f, g \in \mathbb{B}$, $f \leq g$ *e* $a \in [0,1]$.

OBSERVAÇÃO. Se α é uma fuzzy medida e $T(f) = \int_X f d\alpha$ para todo

$f \in [0,1]^X$ então T é um F-funcional e $T(\varphi_A) = \alpha(A)$, $\forall A \in P(X)$, onde φ_A é a função característica de A.

TEOREMA 2 (Representação). *Se* T *é um* F-*funcional sobre uma fuzzy domínio de integração* $\mathbb{B}$, $\mathbb{B} \subset [0,1]^X$, *então* T *é representável por uma fuzzy medida e para todo* $A \in P(X)$ *temos,*

$$\alpha_T(A) = \vee \{T(f) : f \leq \varphi_A,\ f \in \mathbb{B}\}$$

$$\beta_T(A) = \wedge \{T(f) : f \geq \varphi_A,\ f \in \mathbb{B}\}.$$

TEOREMA. *Se* T *é um* F-*funcional sobre* $\mathbb{B} \subset [0,1]^X$, *então para todo* f *de* $[0,1]^X$, *temos*

$$\int_X f d\alpha_T = \vee \{T(g) : g \leq f,\ g \in \mathbb{B}\}, \quad e$$

$$\int_X f d\beta_T = \wedge \{T(g) : g \geq f,\ g \in \mathbb{B}\}.$$

Observamos que quanto mais propriedades são acrescentados ao funcional T ou ao domínio $\mathbb{B}$, isto reflete sobre α_T e β_T.

As demonstrações dos resultados citados aqui e as modificações das propriedades de T e $\mathbb{B}$ são encontradas em [3].

REFERÊNCIAS

[1] G. BANON, Distinction between several subsets of fuzzy-measures, *Fuzzy sets and systems* 5 (1981), 291-305.

[2] R. C. BASSANEZI e G. H. GRECO, Sull'additività dell'integrale, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 72 (1984), 249-275.

[3] R. C. BASSANEZI e G. H. GRECO, On Functionals Representable by fuzzy measures, *Jour. Math. An. Appl.* (a aparecer) 1987.

[4] D. DUBOIS e H. PRADE, "Fuzzy sets and systems: Theory and applications, Academic Press, New York (1980).

[5] D. RALESCU e G. ADAMS, The Fuzzy Integrals, *Jour. Math. An. Appl.* 75 (1980), 562 - 570.

[6] M. SUGENO, Fuzzy Measures and Fuzzy Integrals: A survey, in "Fuzzy Automata and Decision Processes" (M. M. Gupta et al. Eds.), 89 - 102, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[7] L. A. ZADEH, Fuzzy Sets As A Basis For A Theory of Possibility, *Fuzzy sets and systems* 1 (1978), 3 - 28.