Parte 1: Cálculo

Instruções: Resolver as questões C-1 e C-2 e **escolher uma** entre C-3 e C-4.

C-1. (50 pontos) Considere a função $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$.

(a - 10) Encontre todos os pontos de máximo e mínimo de $f(x)$.

(b - 10) Encontre todos os intervalos de crescimento e decrescimento de $f(x)$.

(c - 10) Calcule $\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(d - 10) Encontre os pontos de máximo e mínimo globais de $f(x)$ no intervalo fechado [-2,0].

(e - 10) Utilize as informações dos itens anteriores para esboçar o gráfico de $f(x)$.

C-2. (40 pontos) Considere as funções $f(x) = 2 - x^2$ e $g(x) = |x|$.

(a - 20) Calcule a área da região entre os gráficos de $f(x)$ e de $g(x)$.

(b - 20) Seja $\mathcal{R}$ a região entre o gráfico de $f(x)$ e o eixo x. Considere o sólido obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno do eixo x. Qual é o volume do sólido obtido?

Atenção: Faça **somente uma** entre as questões C-3 e C-4. Indique aqui a questão escolhida: _____

Atenção: EDO não estava no edital. Mantemos ou trocamos?

C-3. (40 pontos) Um medicamento é injetado na corrente sanguínea de um paciente a uma taxa constante de r mg/s. Simultaneamente, o corpo do paciente elimina o medicamento a uma taxa proporcional à quantidade $x(t)$ de medicamento presente no corpo do paciente no instante t.

(a - 15) Determine a equação diferencial que governa $x(t)$

(b - 15) Supondo que no instante inicial ($t = 0$) não havia medicamento no organismo do paciente, isto é, $x(0) = 0$, encontre a função $x(t)$ que descreve a quantidade de medicamento no organismo do paciente.

(c - 10) Considerando a resposta do item anterior encontre a quantidade de medicamento que tende a se estabilizar no corpo do paciente, isto é, $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

C-4. (40 pontos) Uma folha fina de metal, com 60cm de largura e 300cm de comprimento deve ser dobrada de forma a construir uma calha. Especificações técnicas exigem que o ângulo entre a lateral da calha e a horizontal seja igual a 60^o.

(a - 20) Determine quantos centímetros devem ser dobrados para que a calha tenha capacidade máxima (volume máximo).

(b - 20) Se a calha pudesse ter qualquer formato, qual seria o maior volume possível para uma calha construída com a mesma folha de metal (60cm de largura e 300cm de comprimento)? Se necessário, faça hipóteses adicionais.

Parte 2: Álgebra linear

Instruções: Resolver as questões AL-1 e AL-2 e escolher uma entre AL-3 e AL-4.

Al-15. (30 pontos) Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 2x - y + z = a \\ x + 2y - z = 0 \\ bx + y - z = 1 \end{cases}$$

Encontre os valores de a e b para os quais o sistema linear acima:

(a) Possui solução única.

(b) Possui infinitas soluções.

(c) Não possui solução.

AL-2. (40 pontos) A matriz 3×3:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

(a) Encontre todos os autovalores e autovetores da matriz A.

(b) A matriz A é diagonalizável? Em caso afirmativo encontre matrizes P invertível e D diagonal tais que $A = PDP^{-1}$.

Atenção: Faça **somente uma** entre as questões AL-3 e AL-4. Indique a questão escolhida: _____

7. (?? pontos) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z, t) = (x + 2y - z + t, 2x - y + t, x - 3y + z).$$

(a) Encontre o núcleo de T, uma base e a dimensão do núcleo de T.

(b) Encontre a imagem de T, uma base e a dimensão da imagem de T.

(c) T é invertível? Em caso afirmativo, encontre sua inversa.

Incluir alguma questão de aplicação?