IMECC - UNICAMP
Mestrado Profissional em Matemática Aplicada e Computacional

EXAME DE SELEÇÃO

Nome:

Instruções:

- Este exame é dividido em duas partes. A primeira relativa a cálculo diferencial e integral e a segunda relativa a álgebra linear.
- Na parte 1, você deverá escolher DUAS questões entre $\{1.1, 1.2, 1.3\}$ e UMA questão entre $\{1.4, 1.5\}$.
- Na parte 2, você deverá escolher DUAS questões entre $\{2.1, 2.2, 2.3\}$ e UMA questão entre $\{2.4, 2.5\}$.
- As soluções das questões escolhidas devem ser apresentadas logo após seu enunciado e na folha do verso. Caso haja necessidade de ocupar outro espaço, indicar claramente na prova.
- As folhas deste caderno não devem ser destacadas.

Reservado para a correção.
Por favor não utilize este espaço.

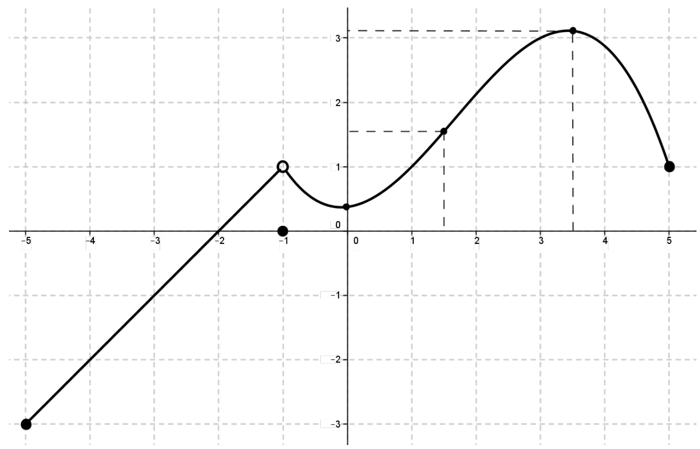
1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	$\sum$
2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	$\sum$

Parte 1: cálculo diferencial e integral

Questão 1.1 - Mostre que, para quaisquer dois números reais x e y,

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Questão 1.2 - A figura abaixo apresenta o gráfico de uma função $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}$.



Com base neste gráfico encontre:

a. $f(-1)$ e $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.

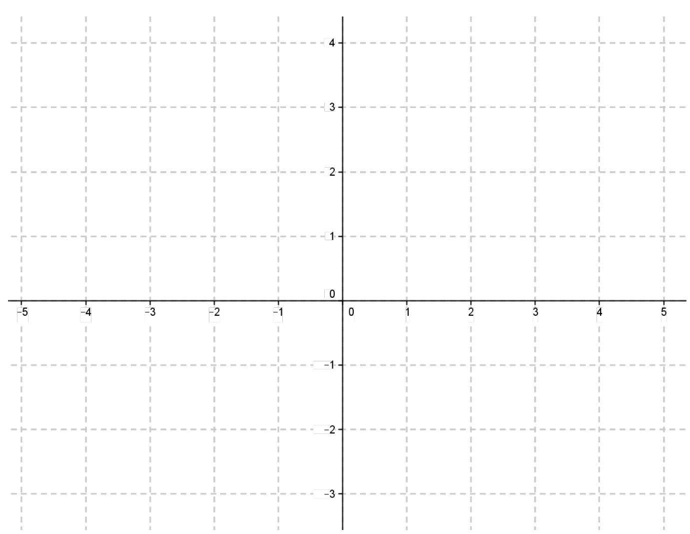
b. Os intervalos abertos nos quais $f'(x) < 0$.

c. Os valores de x tais que $f'(x) = 0$ ou $\nexists f'(x)$.

d. Os pontos de máximo e de mínimo absolutos de $f(x)$.

e. O intervalo aberto onde a função f é concava para cima e o intervalo aberto onde f é concava para baixo.

f. Use o espaço abaixo para fazer um esboço do gráfico de $f'(x)$.



Questão 1.3 - Resolva os itens abaixo:

a. Calcule a área da região S entre os gráficos de $f(x) = x$ e $g(x) = \dfrac{x^3}{4}$. Faça uma interpretação geométrica da região S.

b. Calcule a integral indefinida $\int x^2 \cos(x) dx$.

Questão 1.4 - Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}$$

e faça um esboço das soluções no plano (t, y) quando $t \to \infty$.

Questão 1.5 - Calcule o volume do sólido contido no interior do elipsóide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0.$$

Ao final, faça $a = b = c = r$ e encontre, para este caso especial, o volume da esfera de raio r, dado por $V_e = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Parte 2: álgebra linear

Questão 2.1 - Considere o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x + y & = 1, \\ x + ay & = b. \end{cases}$$

Encontre valores para as constantes a e b de forma que o sistema linear possua:

a. Exatamente uma solução.

b. Mais do que uma solução.

c. Nenhuma solução.

Justifique claramente sua resposta.

Questão 2.2 - Para uma matriz quadrada A, de ordem n, um *autovalor* $\lambda \in \mathbb{R}$ e *autovetor* $v \in \mathbb{R}^n$ são soluções da equação $Av = \lambda v$, com $v \neq 0$.

Seja

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

a. Calcule os autovalores e respectivos autovetores associados à matriz A

b. Faça uma interpretação geométrica no plano (x, y) do resultado encontrado no item [a.] em termos da transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associada a matriz A com respeito à base canônica.

Questão 2.3 - Dado um espaço vetorial V, um subconjunto $W \subset V$ será um subespaço vetorial de V se, e somente se,

1. Para quaisquer $u, v \in W$, tem-se $u + v \in W$.

2. Para quaisquer $a \in \mathbb{R}$ e $u \in W$, tem-se $au \in W$.

Mostre que o conjunto dos vetores $w \in \mathbb{R}^5$ cuja primeira coordenada é nula formam um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^5$.

Questão 2.4 - Considere os seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$:

$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$ e $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$.

Determine:

a. Uma base para $W + U$.

b. A dimensão de $W + U$.

Questão 2.5 - Seja $v = (1,0,1) \in \mathbb{R}^3$, considere a reta r definida de forma paramétrica por $r = tv, t \in \mathbb{R}$.

a. Encontre o ponto p, sobre a reta r, que está mais próximo vetor $b = (2,1,2)$ e calcule a distância entre p e b.

b. Com base nos cálculos feitos no item anterior encontre a matriz P que projeta cada ponto do $\mathbb{R}^3$ sobre a reta r.