
A1 Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear que dobra o comprimento do vetor $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e triplica o comprimento do vetor $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, sem alterar as direções nem inverter os sentidos.

(a) Determinar $T(w)$ para todo $w = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

(b) Exibir a matriz da transformação T na base ordenada $\{u, v\}$.

A2 Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $A^2 = -I$, onde I é a matriz identidade de ordem n .

(a) Determinar todos os autovalores de A .

(b) Provar que a matriz A possui traço igual a 0 e determinante igual a 1.

A3 Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ com $m \geq n$ e considere que $A = \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}$, onde B e C são matrizes de dimensões apropriadas.

(a) Provar que se $\text{Nu}(B) = \text{Im}(C^T)$ então A tem posto completo.

(b) Seja $b \in \mathbb{R}^m$ e suponha que B é uma matriz quadrada não singular e C é uma matriz nula. Provar ou dar um contra-exemplo para a seguinte afirmação: O SISTEMA LINEAR $Ax = b$ SEMPRE ADMITE SOLUÇÃO.

A4 Sejam v_1, v_2, \dots, v_n vetores em \mathbb{R}^n tais que $v_i^T v_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

(a) Provar que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, onde $\alpha_i = x^T v_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

(b) Provar que $\sum_{i=1}^n v_i v_i^T = I$, onde I é a matriz identidade de ordem n .

(c) Seja p um natural tal que $1 \leq p < n$ e considere o subespaço $S \subset \mathbb{R}^n$ gerado pelos vetores v_1, v_2, \dots, v_p . Dado $x \in \mathbb{R}^n$, encontrar $y \in S$ tal que a distância euclidiana entre x e y seja mínima.

C1

(a) Provar, por indução finita, que para todo natural $n = 1, 2, \dots$, o número $4^n + 6n - 1$ é divisível por 9.

(b) Calcular explicitamente a derivada $\frac{d}{dx} \left[\int_{e^{-x}}^{e^x} \sqrt{1 + (\ln t)^2} dt \right]$.

C2 Seja $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial de grau 3 e suponha que exista $t \neq 0$ tal que $p(-t) = p(t)$. Provar que p tem dois pontos críticos, x_1 e x_2 , tais que $x_1 x_2 < 0$.

C3 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função pelo menos duas vezes diferenciável tal que $f'(x) = x + f(x)^2$ e $f(1) = 0$. Provar que para x suficientemente próximo de 1 temos que $f(x) \approx \frac{x^2 - 1}{2}$.

Sugestão: Utilizar a aproximação de Taylor.

C4 Dados a e b reais tais que $0 \leq a \leq b$, definimos as seqüências reais (x_n) e (y_n) de forma recursiva: $x_0 = a$, $y_0 = b$ e, para $n = 0, 1, 2, \dots$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ e $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$. Provar que as seqüências (x_n) e (y_n) convergem para o mesmo limite.
