Departamento de Matemática Aplicada

IMECC – UNICAMP

Exame de Admissão 2014

Programa de Pós–Graduação em Matemática Aplicada

Código de Identificação:

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Questão 5	
Questão 6	
Questão 7	
Questão 8	
Questão 9	
Questão 10	
T o t a l	

Inicialmente, faça uma leitura com muita atenção do enunciado de todas as questões. Apresente somente a ***resolução de oito questões****, dentre as cinco questões de Álgebra Linear e as cinco questões de Cálculo Diferencial e Integral. Todas as questões têm a mesma pontuação. A prova tem duração de quatro horas. Justifique todos os argumentos. Respostas sem justificativas* ***não*** *serão consideradas.*

Boa Prova !

Álgebra Linear

Questão 1. **(20 Pontos)**

Sejam V um espaço vetorial real, A e B conjuntos finitos de V. Considere U o subespaço gerado pelos elementos de A, W o subespaço gerado pelos elementos de B, S o subespaço gerado pelos elementos de $A \cap B$ e R o subespaço gerado pelos elementos de $A \cup B$.

(a) Mostre que $S \subseteq U \cap W$.

(b) Dê um exemplo no qual $S \neq U \cap W$.

(c) Dê um exemplo no qual $S = U \cap W$.

(d) Mostre ou dê um contra–exemplo para a afirmação $R \subseteq U \cup W$.

Questão 2. **(20 Pontos)**

Sejam $\gamma = \{ v_1 , v_2 , v_3 \}$ uma base ordenada para $I\!R^3$ e o conjunto $\beta = \{w_1 , w_2 , w_3\}$, cujos elementos estão relacionados com os elementos da base γ da seguinte forma:

$$\begin{cases} w_1 = -v_1 + v_2 + v_3 \\ w_2 = v_1 - v_2 + v_3 \\ w_3 = v_1 + v_2 \end{cases}$$

(a) Mostre que β é uma base para $I\!R^3$.

(b) Determine a matriz P de mudança da base ordenada β para a base ordenada γ.

(c) Considere o elemento $u = -v_1 - 2v_2 + v_3 \in I\!R^3$. Represente o elemento u como uma combinação linear dos elementos da base β.

(d) Sejam $\alpha = \{ u_1 , u_2 , u_3 \}$ uma base ordenada para $I\!R^3$ e a matriz Q dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a matriz de mudança da base ordenada α para a base ordenada β. Determine a matriz de mudança da base ordenada α para a base ordenada γ.

Questão 3. **(20 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathcal{P}_2(I\!R)$ e a aplicação $F : \mathcal{P}_2(I\!R) \times \mathcal{P}_2(I\!R) \longrightarrow I\!R$ definida por:

$$F(f,g) \;=\; f(-1)g(-1) \;+\; f(0)g(0) \;+\; f(1)g(1)\;.$$

(a) Mostre que a aplicação F define um produto interno no espaço vetorial $\mathcal{P}_2(I\!R)$.

(b) Determine todos os polinômios $q(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2(I\!R)$ que são ortogonais ao polinômio $p(x) = x^2 + 1$, com relação ao produto interno definido pela aplicação F.

Questão 4. **(20 Pontos)**

Sejam $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes reais de ordem $n \times n$, $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ uma matriz invertível e $T : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ a aplicação definida da forma:

$$T(A) = P^{-1}AP \,.$$

(a) Mostre que T é um operador linear sobre $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Mostre que T é um automorfismo de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, isto é, T é injetor e sobrejetor.

(c) Determine o automorfismo inverso $T^{-1} : \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Questão 5. **(20 Pontos)**

Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, S um subespaço de V e $R : V \longrightarrow V$ o operador de reflexão sobre S.

(a) Mostre que R é um operador diagonalizável.

(b) Considere $V = \mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual $\langle \cdot , \cdot \rangle$, S o subespaço de $\mathbb{R}^3$ definido da seguinte forma:

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 0 \} ,$$

e $R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o operador de reflexão sobre o subespaço S.

Determine uma base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ formada de autovetores de R.

Questão 6. **(20 Pontos)**

Considere a transformação $T : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2$ definida da seguinte forma:

$$T : (x, y) \longrightarrow (u, v) = (x - y + 2\,, x + y + 1)\,,$$

e a região $\widehat{\mathcal{R}}$ do plano cartesiano definida da forma:

$$\widehat{\mathcal{R}} = \{\,(x, y) \in I\!R^2 \;/\; x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0 \quad \text{e} \quad x + y \leq 1\,\}\,.$$

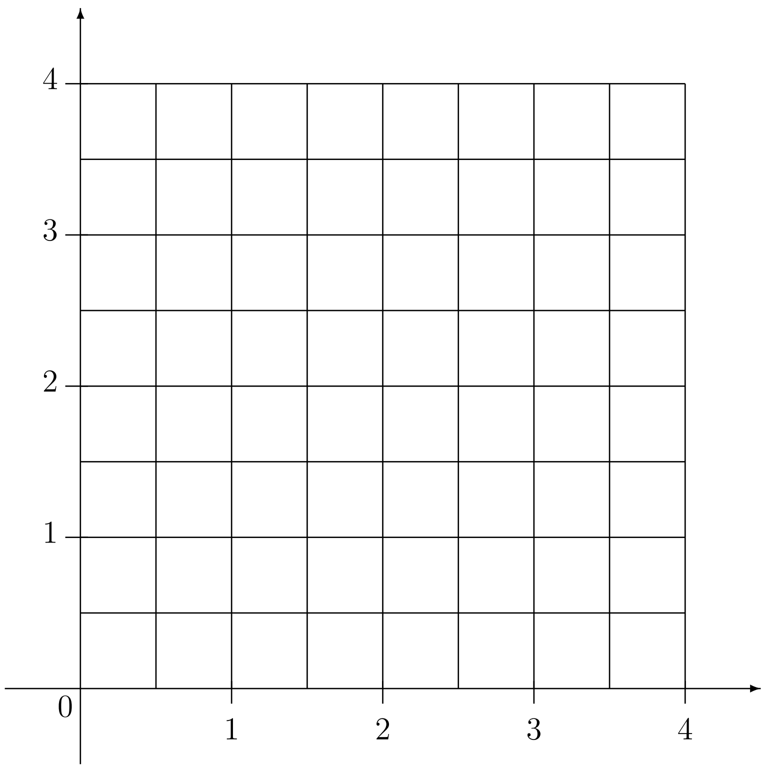
(a) Mostre que a transformação T pode ser escrita da seguinte forma:

$$T = S \circ E \circ R\,,$$

onde S é uma translação, E é uma expansão e R é uma rotação.

(b) Determine a imagem da região $\widehat{\mathcal{R}}$ pela transformação T, que denotamos por $\mathcal{R}$.

(c) Determine a relação entre as áreas das regiões $\widehat{\mathcal{R}}$ e $\mathcal{R}$.



Questão 7. **(20 Pontos)**

Determine os pontos da curva $\Gamma \subset I\!R^3$ definida pela intersecção das superfícies representadas pelas seguintes equações

$$x + y + z - 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad -x + 2y - z + 2 = 0 \,,$$

que estão mais próximos do ponto $0_{I\!R^3} = (0,0,0)$, com relação a norma Euclidiana $\|\cdot\|_2$ de $I\!R^3$ definida da seguinte forma:

$$\| X \|_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \text{para} \qquad X = (x,y,z) \in I\!R^3 \,.$$

Questão 8. **(20 Pontos)**

(a) Na dinâmica dos fluidos, o divergente de um campo vetorial surge como uma medida da taxa de diminuição da densidade do fluido num ponto, isto é, se $\vec{u} = \vec{u}(x, y, t)$ é o vetor velocidade do movimento de em fluido e $\rho = \rho(x, y, t)$ é a densidade do fluido, então o divergente do campo vetorial $\vec{v} = \rho\vec{u}$ satisfaz a seguinte equação

$$div(\vec{v}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}, \tag{1}$$

que é denominada *equação de continuidade* da mecânica dos fluidos.

Mostre que a equação (1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\rho \cdot \vec{u} + \rho\, div(\vec{u}) = 0,$$

Estamos denotando por div o divergente de uma função vetorial, $\vec{\nabla}$ o gradiente de uma função escalar e por "$\cdot$" o produto escalar em $\mathbb{R}^2$.

(b) Considere um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^2$ o bordo de Ω uma curva suave, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, $g : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, e o seguinte Problema de Valor de Contorno

$$\begin{aligned} \Delta p(x,y) &= f(x,y) \qquad \text{para} \qquad (x,y) \in \Omega \\ \vec{\nabla} p(x,y) \cdot \vec{\eta} &= g(x,y) \qquad \text{para} \qquad (x,y) \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{2}$$

onde $\vec{\eta}$ denota o versor normal exterior a $\partial\Omega$.

Mostre que

$$\int_{\Omega} f(x,y)dxdy = \oint_{\partial\Omega} g(x,y)ds.$$

Estamos denotando por $\vec{\nabla}$ o gradiente de uma função escalar, por Δ o Laplaciano de uma função escalar e por "$\cdot$" o produto escalar em $\mathbb{R}^2$.

Questão 9. **(20 Pontos)**

(a) Sejam $f : [a,b] \longrightarrow I\!R$ uma função contínua, $x_1, \cdots, x_n$ pontos distintos de $[a,b]$ e $w_1, \cdots, w_n$ valores reais de mesmo sinal.

Mostre que existe pelo menos um ponto $c \in (a,b)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) w_i \;=\; f(c) \sum_{i=1}^{n} w_i \, .$$

Caso seja necessário, utilize a função auxiliar $\varphi(x) \;=\; f(x)\sum_{i=1}^{n} w_i$.

(b) Considere a equação algébrica

$$\exp(x) \;-\; 4x^2 \;=\; 0 \, . \tag{3}$$

1. Mostre que a equação (3) possui uma única solução $\overline{x} \in [0,1]$.
2. Mostre que a sequência (x_n) dada por:

$$x_{n+1} \;=\; \frac{1}{2} \exp\left(\frac{x_n}{2}\right) \, ,$$

para $n \;=\; 0,\, 1,\, 2,\, \cdots$, converge para $\overline{x}$ para qualquer escolha de $x_0 \in [0,1]$.

Caso seja necessário, utilize as seguintes aproximações

$$\exp(1) \;\approx\; 2,72 \qquad \text{e} \qquad \exp\left(\frac{1}{2}\right) \;=\; 1,65 \, .$$

Questão 10. **(20 Pontos)**

Sejam p e q funções contínuas em um intervalo (a, b), t_0 um ponto qualquer neste intervalo e o Problema de Valor Inicial

$$\begin{aligned} u'(t) \;+\; u(t)p(t) \;&=\; q(t) \qquad \text{para} \qquad a \,<\, t \,<\, b \\ u(t_0) \;&=\; u_0 \end{aligned} \tag{4}$$

(a) Determine uma função η tal que

$$(\,\eta(t)u(t)\,)' \;=\; \eta(t)\,(\,u'(t) + u(t)p(t)\,)\ .$$

(b) Mostre que a solução do PVI (4) é dada da seguinte forma:

$$u(t) \;=\; \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(\xi)d\xi\right)\left[\int_{t_0}^{t} q(\xi)\exp\left(\int_{t_0}^{\xi} p(\tau)d\tau\right)d\xi + u_0\right]\ .$$