Departamento de Matemática Aplicada

IMECC – UNICAMP

Exame de Admissão 2012

Programa de Pós–Graduação em Matemática Aplicada

Código de Identificação:

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Questão 5	
Questão 6	
Questão 7	
Questão 8	
Questão 9	
Questão 10	
T o t a l	

Inicialmente, faça uma leitura com muita atenção do enunciado de todas as questões. Apresente a resolução de somente oito questões, dentre as cinco questões de Álgebra Linear e as cinco questões de Cálculo Diferencial e Integral. Todas as questões têm a mesma pontuação. A prova tem duração de quatro horas. Justifique todos os argumentos. Respostas sem justificativas ***não*** *serão consideradas.*

Boa Prova !

Álgebra Linear

Questão 1. **(20 Pontos)**

Considere que a matriz A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz de um produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ com relação à base ordenada

$$\Gamma = \{ w_1 = (-1,1,1) \, , \, w_2 = (0,1,-1) \, , \, w_3 = (2,1,1) \} \, .$$

(a) Determine uma base para o complemento ortogonal do subespaço S, gerado pelo elemento $v = (5,6,2)$, com relação ao produto interno definido pela matriz A.

(b) Determine a matriz que representa o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$ com relação à base ordenada Γ.

Questão 2. **(20 Pontos)**

Considere V um espaço vetorial real de dimensão finita munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, $\beta = \{ v_1 , \cdots , v_n \}$ uma base para V e T um operador linear sobre V.

(a) Mostre que a matriz $A = [a_{ij}]$ onde

$$a_{ij} = \langle v_i , v_j \rangle \qquad \text{para} \qquad i , j = 1, 2, \cdots , n ,$$

é uma matriz positiva–definida.

(b) Dados n números reais arbitrários $c_1 , \cdots , c_n$, prove que existe um único elemento $v \in V$ de modo que

$$\langle v , v_1 \rangle = c_1 , \cdots , \langle v , v_n \rangle = c_n .$$

(c) Mostre que $dim(Im(T)) = 1$ se, e somente se, existem elementos $u, w \in V$ tais que $T(v) = \langle v , u \rangle w$ para todo $v \in V$, com $u , w \neq 0_V$.

Questão 3. **(20 Pontos)**

Considere o espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^2$ munido do produto interno usual $\langle \cdot , \cdot \rangle$, e o operador linear $T : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ definido da seguinte forma: $T(z, w) = (z + iw , iz + w)$.

(a) Mostre que conjunto $\gamma = \{ (i , 1) , (1 , i) \}$ é uma base ordenada para $\mathbb{C}^2$.

(b) Determine a matriz do operador linear T com relação a base ordenada γ, isto é, determine a matriz $[T]_{\gamma}^{\gamma}$.

(c) Verifique se T é um operador linear diagonalizável. Em caso afirmativo, determine uma base ordenada β para $\mathbb{C}^2$ de modo que $[T]_{\beta}^{\beta}$ seja uma matriz diagonal.

Questão 4. **(20 Pontos)**

(a) Considere o espaço vetorial real $I\!R^3$ munido de um produto interno e $U \subsetneq I\!R^3$ um subespaço não nulo. Mostre que não existe um operador linear T sobre $I\!R^3$ de modo que

$$T(U) = U^{\perp} \quad \text{e} \quad T(U^{\perp}) = U \ .$$

(b) Considere o espaço vetorial real $I\!R^3$ munido do produto interno usual $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e U o subespaço de $I\!R^3$ definido da seguinte forma:

$$U = \{ (x, y, z) \in I\!R^3 \ / \ x + y - z = 0 \} \ .$$

Determine de forma explícita a expressão de um operador linear T sobre $I\!R^3$, diferente do operador identidade, de modo que

$$T(U) = U \quad \text{e} \quad T(U^{\perp}) = U^{\perp} \ .$$

Questão 5. **(20 Pontos)**

Sejam V um espaço vetorial real munido do produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, S um subespaço de dimensão finita de V e P o operador de projeção ortogonal sobre S.

(a) Mostre que $V = Im(P) \oplus Ker(P)$, onde $Ker(P)$ é o núcleo do operador P.

(b) Considere que V tem dimensão finita, mostre que P é um operador diagonalizável.

Questão 6. **(20 Pontos)**

Considere a equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$y''(x) \ + \ ay'(x) \ + \ by(x) \ = \ 0 \quad , \quad x \in (0\,,\,1)\;.$$

com as condições de fronteira

$$y(0) \ = \ 0 \qquad \text{e} \qquad y(1) \ = \ 0\;.$$

Determina a relação entre os parâmetros a e b de modo que o problema de valor de contorno acima tenha solução não trivial.

Questão 7. **(20 Pontos)**

Considere a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 ,$$

denominada *equação da onda*, onde c é uma constante positiva, $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$.

(a) Mostre que a equação acima se transforma na equação diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 ,$$

pela mudança de coordenadas

$$\xi = x + ct \qquad \text{e} \qquad \eta = x - ct .$$

(b) Mostre que $u(x,t) = f(x + ct) + f(x - ct)$ é solução da equação da onda para qualquer função real f duas vezes continuamente diferenciável.

Questão 8. **(20 Pontos)**

Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e com a norma Euclidiana $\| \cdot \|_2$ proveniente desse produto interno. Determine a solução do sistema linear

$$\begin{cases} x + y + 2z + t = -15 \\ 2x - 2y + z + t = 11 \end{cases}$$

que está mais próxima do ponto $0_{\mathbb{R}^4} = (0, 0, 0, 0)$.

Questão 9. **(20 Pontos)**

Considere a forma diferencial

$$2xydx \; + \; (\, x^2 \; - \; y^2\,)dy \; ,$$

e Γ a curva simples fechada definida pela equação

$$4x^2 \; + \; y^2 \; = \; 4 \; ,$$

com a orientação no sentido anti–horário.

(a) Determine a equação vetorial da curva Γ, isto é, determine uma função vetorial

$$\vec{\Gamma}(t) \; = \; x(t)\vec{\imath} \; + \; y(t)\vec{\jmath} \; ,$$

especificando o intervalo do parâmetro t, e faça um esboço da curva orientada Γ.

(b) A forma diferencial é exata em alguma região simplesmente conexa? Em caso afirmativo, determine um campo escalar F de modo que

$$dF \; = \; \frac{\partial F}{\partial x}dx \; + \; \frac{\partial F}{\partial y}dy \; = \; 2xydx \; + \; (\, x^2 \; - \; y^2\,)dy \; .$$

(c) Determine o valor da integral de linha da forma diferencial ao longo da curva orientada Γ.

Questão 10. **(20 Pontos)**

Considere a integral imprópria

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy}\, dxdy = \lim_{t \to 1^-} \int_0^t \int_0^t \frac{1}{1 - xy}\, dxdy\ .$$

(a) Expandindo o integrando como uma série geométrica de razão $r = xy$, mostre que

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\ .$$

(b) Utilizando a série geométrica obtida no item (a), mostre que $I < 2$.
Sugestão: Tome uma Soma de Riemann Inferior conveniente.