EXAME DE INGRESSO/BOLSA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA
DEZEMBRO 2016

A1 Seja $c \in \mathbb{R}^n$ um vetor não nulo e considere a matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida por

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{pmatrix}.$$

(a) Determine o posto de A.

(b) Determine **todos** os autovalores de A e seus respectivos autoespaços.

A2 Sejam u e v vetores em $\mathbb{R}^n$ e denote por $\|\cdot\|$ a norma euclidiana, isto é, $\|x\| = \sqrt{x^T x}$.

(a) Prove que $u - v$ e $u + v$ são linearmente independentes se e somente se u e v são linearmente independentes.

(b) Prove que $u - v$ é ortogonal a $u + v$ se e somente se $\|u\| = \|v\|$.

(c) Determine o ângulo entre u e v no caso em que $\|u\| = \|v\| = \|u + v\| \neq 0$.

A3 Para as transformações lineares $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definidas abaixo, descreva geometricamente os subespaços **Núcleo de** T e **Imagem de** T e exiba uma base para cada um deles.

(a) $T(x)$ é a reflexão de x em relação ao plano $x_3 = 0$.

(b) $T(x)$ é a projeção ortogonal de x sobre o plano $x_1 = x_2$.

A4 Seja x um número real e considere a matriz quadrada de ordem 3,

$$M = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}.$$

Determine **todos** os valores de x para os quais:

(a) A matriz M é invertível.

(b) Para todo $v \in \mathbb{R}^3$, $v^T M v \geq 0$.

EXAME DE INGRESSO/BOLSA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA
DEZEMBRO 2016

C1

(a) Escreva (i) a recíproca, (ii) a negação e (iii) a contrapositiva da seguinte afirmação:

Se beber, não dirija.

(b) Sejam a e b números inteiros não divisíveis por 3. Prove que $a^2 - b^2$ é divisível por 3.

C2 Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio de grau n e considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ p(x), & 0 < x < 1, \\ x, & x \geq 1. \end{cases}$$

Determine p com o menor grau possível de modo que f seja diferenciável para todo $x \in \mathbb{R}$ e esboce o gráfico de $y = f(x)$ para $-1 \leq x \leq 2$.

C3 Considere a superfície definida por $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2^2 + 3x_3^3 = 6x_1x_2x_3\}$ e seja $P = (1, 1, 1)$.

(a) Encontre as equações do plano tangente e da reta normal à superfície S em P.

(b) Mostre que existe uma vizinhança de P tal que x_3 pode ser colocado em função de x_1 e x_2 para $x \in S$ e determine as derivadas parciais $\partial x_3/\partial x_1$ e $\partial x_3/\partial x_2$ em P.

C4 Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável, tal que

$$f(1,0) = 2, \quad \nabla f(1,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 f(1,0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

e considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(1) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Determine a aproximação de Taylor de ordem 3 para a solução $y(x)$ numa vizinhança de $x = 1$.