EXAME DE QUALIFICAÇÃO PARA O MESTRADO EM ESTATÍSTICA

PROVA DE INFERÊNCIA

08/01/2026

INSTRUÇÕES

1. A duração da prova é de 4 horas.
2. Não é permitido consulta.
3. Inicie cada questão em uma nova folha. Escreva de maneira clara e organizada. Numere e identifique cada folha utilizada (use apenas um lado da folha, não use frente e verso).
4. Escolha 4 das 5 questões, indicando-as claramente. Responda mostrando seu argumento de forma clara e concisa. Respostas sem justificativa não serão consideradas.
5. Tranquilidade e Boa Sorte.

1. Considere o modelo de regressão linear com intercepto nulo definido por

$$Y_i = \beta x_i + e_i, \quad i = 1, ..., n,$$

onde $e_i \sim N(0, \sigma^2)$, $i = 1, ..., n$ são independentes, e as variávesi $x_1, ..., x_n$ conhecidas. Além disso, $\sigma > 0$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

   (a) [0,4] Mostre que a distribuição das observações pertence à família exponencial. Identifique os elementos.

   (b) [0,7] Encontre um ENVUMV para β^2 assumindo que σ^2 é conhecida.

   (c) [0,7] Proponha uma estatística para testar as hipóteses $H_0 : \beta = \beta_0$ contra $H_1 : \beta \neq \beta_0$. Adicione condições que você ache necessária.

   (d) [0,7] Suponha β conhecido e suponha que a distribuição a priori de $\sigma^2 \sim IGa(\alpha, \eta)$, Inversa Gama, com $\eta > 0$, $\alpha > 1$ e $E(\sigma^2) = \eta/(\alpha - 1)$, $\alpha > 1$, e onde sua fdp é dada por

$$\pi(\sigma^2) = \frac{\eta^\alpha}{\Gamma(\alpha)(\sigma^2)^{\alpha+1}} e^{-\frac{\eta}{\sigma^2}} I_{(0,\infty)}(\sigma^2).$$

   Determine o estimador de Bayes de σ^2 baseado na perda quadrática

2. Um economista quer estimar a proporção de paulistas que se consideram ricos. Ele contratou 180 estudantes de pós-graduação para telefonar para pessoas aleatoriamente selecionadas de uma lista de paulistas, e perguntar para cada pessoa se elas se consideram ricas. Como é difícil encontrar pessoas que admitam serem "bem de vida", ele pediu para cada estudante continuar ligando até que duas dessas pessoas sejam encontradas e então reportar o número total de telefonemas feitos. Suponha que o total geral, de todos os estudantes, seja de 2400 telefonemas.

   Suponha que $X_1, \ldots, X_n$ é uma a. a. de X que tem fdp dada por

$$f(x; p) = (x - 1)p^2(1 - p)^{x-2} I_{\{2,3,\ldots\}}(x), \quad p \in (0, 1)$$

   que é um modelo razoável para este problema.

   (a) [0,5] Mostre que a família de distribuições Beta,

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1 - x)^{\beta-1} I_{[0,1]}(x), \ \alpha, \beta > 0,$$

   dá uma família conjugada de prioris para esse problema, isto é, se a distribuição a priori de p, $\pi(p)$, é uma $Beta(\alpha, \beta)$, a distribuição a posteriori $\pi(p \mid \mathbf{x})$ também é uma Beta.

   (b) [0,8] Seja $\hat{p}$ a média da distribuição a posteriori, ou seja, $\hat{p} = E[p \mid \mathbf{X}]$. Dê a fórmula para $\hat{p}$ e diga qual o valor numérico de $\hat{p}$ usando os dados acima e a distribuição uniforme ($U(0, 1)$) como priori.

   (c) [0,7] Encontre $E(X)$ e $Var(X)$
   Dica: Use a definição de esperança e use o fato de que fgm $M_Y(t) = E(e^{tY}) = \frac{pe^t}{(1+qe^t)}$, se $Y \sim f(y, p) = p(1 - p)^{y-1} I_{\{1,2,\ldots\}}(y)$.

   (d) [0,5] Mostre que $\hat{p} \to p$ (em probabilidade) quando $n \to \infty$.
   Dica: Você pode usar o fato de que $\hat{p} = g(\bar{X})$.

3. Suponha que X representa o tempo de falha de um equipamento eletrônico com distribuição Weibull deslocada, cuja fdp é dada por

$$f(x;\beta,\phi,a) = \frac{\beta}{\phi}(x-a)^{\beta-1}e^{-(x-a)^{\beta}/\phi}I_{[a,\infty)}(x), \quad \beta > 0, \quad \phi > 0, \quad a > 0,$$

Suponha β conhecidos e seja $X_1, \cdots, X_n$ uma a. a. de X.

(a) [0,5] Para $a = 0$, determine um ENVUMV para ϕ.

(b) [0,6] Para $n = 1$ e ϕ conhecido, encontre um IC de menor comprimento para a com nível de confiança de $\gamma = 1 - \alpha$.

(c) [0,7] Para a conhecido, encontre um teste UMP de nível α para as hipóteses $H_0 : \phi = \phi_0$ vs $H_1 : \phi > \phi_0$.

(d) [0,7] Obtenha um teste envolvendo a estatística $S = \sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^{\beta}/n$ (a conhecido), para as hipóteses do item a), suponha que n seja grande e utilize a distribuição normal com nível aproximado de α. Qual é sua conclusão se $S = 2, \alpha = 0,05; \phi_0 = 1$ e $n = 100$?

4. Uma microbiologista descobriu um novo tipo de bactéria, que tem um tempo de vida que parece ser pelo menos algum valor desconhecido $\theta > 0$, mas nunca maior do que $\theta + 1$. E parece ser mais perto de $\theta + 1$. Ela assume que os tempos de vida são aleatórios, com distribuição tendo densidade de probabilidade

$$f(x;\theta) = 2(x-\theta)I_{[\theta,\theta+1]}(x).$$

Para um experimento cuidadosamente delineado para assegurar independência, alguns tempos de vida foram medidos e estes foram: 4.8, 5.1 e 5.2.

(a) [0,5] Encontre o EMV ($\hat{\theta}_1$) de θ, incluindo o valor numérico de $\hat{\theta}_1$.

(b) [0,6] Mostre que $E(X) = \theta + 2/3$ e $Var(X) = 1/18$.

Dica: Note que $Var(X) = Var(X - \theta)$.

(c) [0,4] Encontre o estimador de θ pelo método dos momentos ($\hat{\theta}_2$), incluindo o valor numérico de $\hat{\theta}_2$.

(d) [0,5] Use o Teorema Central do Limite (TCL) para mostrar que

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_2 - \theta) \xrightarrow{d} N(0, 1/18).$$

(e) [0,5] Use o resultado do TCL do item acima e encontre o p-valor para o teste $H_0 : \theta = 4.9$ x $H_1 : \theta > 4.9$, baseado em $\hat{\theta}_2$ como estatística de teste e sua distribuição assintótica, Considerando $n = 100$ e $\bar{x} = 5$

5. Seja X uma v. a. com fda dada por $H(x;\theta) = (1-\theta)F(x) + \theta G(x)$, onde F e G são fda's com fdp's $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente (pense que temos amostra de tamanho 1).

   (a) [0,8] Mostre que $H(x|\theta)$ satisfaz a propriedade da RVM crescente em x se e somente se $g(x)/f(x)$ é crescente em x (lembre que uma função diferenciável $h(x)$ é crescente sse $h'(x) > 0$).

   (b) [0,8] Seja $h(x;\theta)$ a fdp de X e suponha que $g(x)/f(x)$ é crescente em x. Mostre q ue o teste definido abaixo, baseado em uma única observação, é UMP de tamanho α para testar $H_0 : \theta \leq \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta > \theta_0$:
$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \geq k, \\ 0, & x < k \end{cases}$$
   onde k satisfaz a equação $[G(k) - F(k)]\theta_0 = 1 - \alpha - F(k)$.

   (c) [0,9] Seja $H(x;\theta) = (1-\theta)(1-e^{-2x}) + \theta(1-e^{-x})$, $x > 0$. Existe um teste UMP de nível $\alpha = 0,05$ para testar as hipóteses em b)?. Justifique.