Exame de Qualificação – Doutorado em Estatística
Parte I
9 de fevereiro de 2026

Instruções:

1. Leia atentamente as questões.

2. A prova é composta de 3 exercícios, que devem ser respondidos de forma clara, completa e detalhada.

3. A duração da prova é de 3 horas.

4. Não é permitido consulta.

5. Inicie cada questão em uma folha separada e coloque o seu nome completo e RA em cada folha.

Exercício 1: [*30 pts.*]

(a) [*15 pts.*] Encontrar o seguinte limite:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{nx}\right) dx.$$

(b) [*15 pts.*] Seja $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-xy} & \text{se } (x,y) \neq (1,1), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (1,1). \end{cases}$$

Mostrar que $f \in \mathcal{L}^1([0,1]^2)$.

Dica: No item (b), use que para qualquer $z \in (-1,1)$,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Exercício 2: [*35 pts.*] Seja $\{X_n\}_{n\geq 1}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição Exp(1). Definimos

$$U_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\},\ n \geq 1.$$

(a) [*5 pts.*] Mostrar que $U_n \sim \text{Exp}(n)$.

(b) [*10 pts.*] Provar que U_n converge para 0 em distribuição.

(c) [*10 pts.*] A convergência também ocorre quase certamente?

(d) [*10 pts.*] Para $\alpha > 1$ fixado, definimos $V_n = U_n^\alpha$. Considere $1 < \beta < \alpha$. Mostrar que

$$P\left(V_n \leq \frac{1}{n^\beta} \text{ para todo } n \text{ suficientemente grande}\right) = 1.$$

Concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ converge quase certamente.

Exercício 3: [*35 pts.*] Considere um arranjo triangular de variáveis aleatórias independentes

$$\{X_{n,k} : 1 \le k \le n,\, n \ge 1\},$$

definido da seguinte forma.

Para cada $n \ge 1$, seja $X_{n,1}$ uma variável aleatória com distribuição

$$X_{n,1} = \begin{cases} +\sqrt{n} & \text{com probabilidade } \dfrac{1}{2\,n}, \\ -\sqrt{n} & \text{com probabilidade } \dfrac{1}{2\,n}, \\ 0 & \text{com probabilidade } 1 - \dfrac{1}{n}, \end{cases}$$

e sejam $X_{n,2}, \dots, X_{n,n}$ variáveis aleatórias independentes entre si e independentes de $X_{n,1}$, tais que

$$X_{n,k} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1 - \frac{1}{n}}{n-1}\right), \qquad 2 \le k \le n.$$

Defina a soma parcial

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_{n,k}.$$

(a) [*7 pts.*] Mostrar que $E(X_{n,k}) = 0$ para todo n e todo k, e que

$$\operatorname{Var}(S_n) = 2 - \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2.$$

(b) [*7 pts.*] Mostrar que a *condição de Lindeberg* falha, isto é, provar que existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} E\big[X_{n,k}^2\, \mathbf{1}_{\{|X_{n,k}| > \varepsilon\}}\big] > 0.$$

(c) [*7 pts.*] Provar que $X_{n,1} \overset{\text{P}}{\longrightarrow} 0$ quando $n \to \infty$.

(d) [*7 pts.*] Mostrar que

$$\sum_{k=2}^{n} X_{n,k} \overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0,1).$$

(e) [*7 pts.*] Concluir que

$$S_n \overset{\mathcal{D}}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0,1),$$

apesar da falha da condição de Lindeberg.

Exame de Qualificação – Doutorado em Estatística
Parte II
11 de fevereiro de 2026

Importante, ler com cuidado: Todo tipo de documento, livro etc. é proibido. A solução das questões é de caráter individual e, portanto, consultas, conversas, troca de ideias ou materiais constituem violação desse caráter. A duração da prova é de 3 horas.

- Para recebimento de crédito total, desenvolva suas respostas.
- **As soluções têm que ser apresentadas em ordem; por exemplo, 4a $\rightarrow$ 4b.**
- Inicie cada questão em uma folha separada e coloque o seu nome completo e RA em cada folha.

Boa Sorte.

Exercício 1: Seja $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d, com distribuição F desconhecida. Suponha que F seja completamente determinada pelo valor de $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) (15 pontos) Enuncie e prove a dualidade entre um intervalo de $100\gamma\%$ de confiança e um procedimento de teste da hipótese para

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ vs } H_1 : \theta \neq \theta_0$$

com probabilidade do erro do tipo 1 igual a α.

(b) (5 pontos) Interprete o resultado demonstrado acima.

Exercício 2: Considere $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d, com distribuição F, sendo F tal que X_1 tem distribuição

$$\begin{cases} U(-1,1) \text{ (uniforme contínua)}, & \text{com probabilidade } \theta; \text{ e} \\ \text{triangular, com densidade dada por (1)}, & \text{com probabilidade } 1-\theta, \end{cases}$$

em que

$$f(x) = \frac{1}{c(\theta)}\left(1 - \frac{|x-\theta|}{c(\theta)}\right), \text{ para } \theta - c(\theta) < x < \theta + c(\theta), \tag{1}$$

sendo $c(\cdot)$ alguma função real, contínua e decrescente, com $c(0) = 1$, $0 < c(\theta) \leq 1 - \theta$, para $0 < \theta < 1$, e tal que $c(\theta) \to 0$ quando $\theta \to 1$.

(a) (5 pontos) Esboce e discuta o gráfico da densidade de X_1.

(b) (5 pontos) Encontre o estimador por máxima verossimilhança (EMV), $\hat{\theta}_n$.

(c) (15 pontos) Estude o limite assintótico do EMV, $\hat{\theta}_n$, quando $n \uparrow \infty$, e mostre que $\hat{\theta}_n$ não obedece ao famoso Teorema Central do Limite para Estimadores por Máxima Verossimilhança.

(d) (5 pontos) Discuta as condições de regularidade do TCL para EMV's e aponte quais são válidas e quais são violadas neste caso.

Exercício 3: Considere X_1 como sendo uma única observação da variável aleatória X com densidade $f(x)$, com respeito à medida de Lebesgue,

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \frac{(x_m)^\alpha}{2} |x|^{-\alpha-1}, & |x| > x_m, \\ 0, & |x| \leq x_m. \end{cases}$$

onde $x_m \in \mathbb{R}^{>0}$ e $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$.

Assuma x_m conhecido e considere uma distribuição a priori sobre α proporcional a $\mathbf{1}_{(0,\infty)}(\alpha)$. Onde $\mathbf{1}_A(\cdot)$ denota a função indicadora do conjunto A.

(a) [*8 pts.*] Compute a distribuição a posteriori de α, dado $X_1 = x_1$ observado.

(b) [*7 pts.*] Identifique o estimador Bayesiano de α, dado $X_1 = x_1$ observado, nos seguintes casos: (i) considerando perda quadrática, (ii) considerando perda L, da sua escolha.

(c) [*10 pts.*] Considere α_0 um valor de interesse. Dado $X_1 = x_1$ observado, postule:

$$H_0 : \alpha = \alpha_0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \alpha \neq \alpha_0.$$

Apresente a regra de aceitação de H_0.

Exercício 4: Considere X_1 como sendo uma única observação da variável aleatória X com densidade $f(x)$, com respeito à medida de Lebesgue. Adote um nível de significância α tal que $\alpha > 0$. Suponha as hipóteses H_0 e H_1 definidas a seguir

$$H_0 : f(x) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \quad \text{versus} \quad H_1 : f(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)\mathbf{1}_{[-1,1]}(x). \tag{2}$$

$$H_0 : f(x) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \quad \text{versus} \quad H_1 : f(x) = \frac{\exp(-(x+1))}{1 - \exp(-2)}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x). \tag{3}$$

Onde $\mathbf{1}_A(\cdot)$ denota a função indicadora do conjunto A.

(a) [*10 pts.*] Identifique da forma mais completa possível a região de rejeição do teste mais poderoso ao nível α, para a situação (2) e para a situação (3), respectivamente.

(b) [*10 pts.*] Calcule a função poder do teste na alternativa H_1, para a situação (2) e para a situação (3), respectivamente.

(c) [*5 pts.*] Compare as situações: (2) versus (3). Qual situação apresenta maior poder?