Programa de Pós–Graduação em Matemática Aplicada

IMECC - Unicamp

Exame de Admissão – 2^o Semestre 2025

Código de Identificação:

Questões	*Pontos*
Questão 1	
Questão 2	
Questão 3	
Questão 4	
Questão 5	
Questão 6	
Questão 7	
Questão 8	
T o t a l	

- Desligue o celular.
- **NÃO** retire o grampo da prova nem destaque páginas da prova.
- Utilize o verso da folha ou as folhas adicionais, se necessário.

Inicialmente, faça uma leitura com muita atenção do enunciado de todas as questões. Todas as questões têm a mesma pontuação. Justifique todos os argumentos. Respostas sem justificativas ***não*** *serão consideradas.*

Boa Prova !

Questão 1. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $T : V \to V$ a transformação linear definida por

$$T(\boldsymbol{v}) = (2x + y, x + 2y), \quad \forall \boldsymbol{v} = (x, y) \in V. \tag{1}$$

(a) Determine os auto-valores e auto-vetores de T, bem como suas multiplicidades algébricas e geométricas.

(b) Mostre que T é um operador auto-adjunto (ou seja, $\langle T(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, T(\boldsymbol{v})\rangle$ para todo $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$) e positivo (ou seja, $\langle T(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{v}\rangle > 0$ para todo $\boldsymbol{v} \neq 0$).

Questão 2. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e $T : V \to V$ um operador linear tal que $T^2 = T$ (isto é, T é um operador idempotente).

(a) Mostre que

$$V = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{I}m(T), \tag{2}$$

em que $\mathcal{N}(T)$ e $\mathcal{I}m(T)$ denotam o núcleo e a imagem de T, respectivamente.

(b) Mostre que T é uma projeção ortogonal sobre $\mathcal{I}m(T)$ (isto é $\langle \boldsymbol{v} - T(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w} \rangle = 0$ para todo $\boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} \in \mathcal{I}m(T)$) se, e somente se, T é auto-adjunto.

Questão 3. Considere uma matriz H_k definida recursivamente como segue:

$$H_1 = \begin{bmatrix} +1 & +1 \\ +1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H_k = \begin{bmatrix} H_{k-1} & H_{k-1} \\ H_{k-1} & -H_{k-1} \end{bmatrix}, \quad k = 2, 3, \ldots. \tag{3}$$

a) Mostre que $H_k H_k^T = 2^k I$, em que I denota a matriz identidade.

b) Mostre que, se $\mathbf{x}_k$ é um auto-vetor de H_k, então

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ (-1 + \sqrt{2})\mathbf{x}_k \end{bmatrix}, \tag{4}$$

é um auto-vetor de H_{k+1}.

Questão 4. Seja $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual à 2.

(a) Encontre uma base para o subespaço

$$S = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \int_0^1 p(x)dx = 0\}. \tag{5}$$

(b) Usando o produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx, \tag{6}$$

determine o complemento ortogonal do subespaço vetorial

$$U = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p(-x) = p(x), \forall x \in \mathbb{R}\}. \tag{7}$$

Questão 5.

(a) Considere $\alpha \in \mathbb{R}$ e a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (x-\alpha)^2 - 5\alpha - \alpha\cos(2x), & \text{se } x < 0, \\ x^3 + \alpha\,\text{sen}(x) + \alpha e^{-\alpha x}, & \text{se } x \geq 0. \end{cases} \tag{8}$$

Determine os possíveis valores de α para que f seja contínua em seu domínio. Para cada valor de α encontrado, avalie o limite $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(b) Seja $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, para $n \in \mathbb{N}$, a função contínua definida por

$$g_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{2}, \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right), & \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1, & x > \frac{1}{2} + \frac{1}{n}. \end{cases} \tag{9}$$

Determine a função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida pelo limite $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ para todo $x \in [0,1]$. Discuta a continuidade de g e g_n, para $n \in \mathbb{N}$.

Questão 6.

(a) Suponha f'' contínua em $[a, b]$. Mostre que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \int_a^b (b - t) f''(t) dt. \tag{10}$$

(b) Existe uma função $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ não-nula tal que $\int_0^1 \big(g(x)\big)^2 dx = 0$? Em caso afirmativo, forneça um exemplo.

Questão 7.

(a) Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ uma função contínua. Mostre que existe pelo menos um $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.

(b) Seja g uma função contínua em $[a,b]$ com segunda derivada g'' definida em (a,b). Suponha que o segmento de reta ligando $(a, g(a))$ e $(b, g(b))$ intercepte o gráfico de g em um terceiro ponto $(c, g(c))$, com $a < c < b$. Mostre que existe pelo menos um ponto $\xi \in (a,b)$ tal que $g''(\xi) = 0$.

Questão 8.

(a) Determine c tal que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^{x}=4. \tag{11}$$

(b) O gráfico da solução u da equação diferencial $y''-3y'-4y=0$ intercepta o gráfico da solução v da equação diferencial $y''+4y'-5y=0$ na origem. Determine u e v sabendo que as duas curvas possuem a mesma inclinação na origem e que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\big(v(x)\big)^{4}}{u(x)}=\frac{5}{6}. \tag{12}$$

Folha Adicional

Folha Adicional

Folha Adicional

Folha Adicional

Folha Adicional

Folha Adicional