EXAME DE INGRESSO/BOLSA **DEZEMBRO 2017**

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

Q1 Sejam W um espaço vetorial de dimensão 5 e U e V subespaços vetoriais de W, ambos de dimensão 3. Prove que existe um vetor não nulo $x \in U \cap V$, e apresente um resultado mais geral, supondo que W tem dimensão p, U tem dimensão q e V tem dimensão r.

Q2 Dada $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$ definimos os conjuntos $\mathcal{K}(C) = \{x \in \mathbb{R}^q \mid Cx = 0\}$ e $\mathcal{R}(C) = \{Cx \in \mathbb{R}^p \mid x \in \mathbb{R}^q\}$. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tais que AB é não singular. Prove que:

(a) $\mathcal{K}(B) = \{0\}$. (b) $\mathcal{K}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$. (c) Se $m = n$ então A e B são não singulares.

Q3 Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ e considere o conjunto $\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid Av = \lambda v\}$.

(a) Prove que $\mathcal{S}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^{n\times n}$ se e somente se $\lambda = 0$.

(b) Encontre $A \in \mathcal{S}$, simétrica e singular, no caso em que $\lambda = 2$ e $v = [1, -1]^T \in \mathbb{R}^2$.

Q4 Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ e considere a matriz $A = I + uv^T$, onde I é a matriz identidade de ordem n. Prove que A é singular se e somente se $u^T v = -1$.

Q5 Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x/2, & \text{se } x \text{ é par,} \\ 3x+1, & \text{se } x \text{ é ímpar.} \end{cases}$ Prove ou dê um contra-exemplo para as seguintes afirmações: (i) f é injetora. (ii) f é sobrejetora.

Q6 Sejam L um número real e (a_n) e (b_n) sequências de números reais tais que $\lim a_n = \lim b_n = L$. Prove que a sequência $(x_k) = (a_1, b_2, a_3, b_4, a_5, b_6, \ldots)$ é tal que $\lim x_k = L$.

Q7 Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = xg(y) - yg(x)$, onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $g \in C^2$, $g(0) = 0$ e $|g''(x)| \leq C$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) Prove que se $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ então $|f(x, y)| \leq C$.

(b) Encontre o valor da integral dupla $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dxdy$.

Q8 Seja $f \in [0, 3] \to \mathbb{R}$, diferenciável, tal que $f'(x)(x + 2)^2 = f(x)(x + 2) + x - 18$, $f(0) = 4$ e $f(3) = 1$. Discretizando o intervalo $[0, 3]$ em subintervalos de tamanho $h = 1$ e utilizando a aproximação por diferenças finitas centradas, $f'(x) \approx \dfrac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$, encontre aproximações para $f(1)$ e $f(2)$.