# Proposta de Disciplina para o segundo semestre de 2022/IMECC - Unicamp

## Informações do proponente


Leonardo Francisco Cavenaghi

PhD em Matemática (Dezembro de 2020)

PNPD no IMECC sob a supervisão do Prof. Dr. Lino Grama, em razão do vencimento do Prêmio Capes tese de 2021

e-mail: leonardofcavenaghi@gmail.com

Lattes CV: `http://lattes.cnpq.br/2750734381183404`

# 1 Tópicos em Análise Geométrica: geometria global, curvatura e equações diferenciais em geometrias clássicas

## 1.1 Objetivo

Introduzir aos estudantes conceitos úteis em várias áreas de pesquisas vigentes, que vão desde diversas deformações métricas em geometria: deformação conforme, deformações canônica e de Cheeger, fluxos de curvatura média, fluxos de Ricci; junto de outras técnicas, algébrias e geométricas, visando fornecer um panorama geral sobre temas centrais na pesquisa corrente em geometria riemanniana, especialmente na área de curvaturas positivas. O curso assim proposto visa fornecer uma formação básica, sólida e interdisciplinar, com temática inserida na área de geometria, mas se valendo de relações profundas com análise de equações diferenciais e até métodos algébricos.

## 1.2 Justificativa

Uma formação interdisciplinar se faz necessária para estabelecer ferramentas básicas mas essenciais para o desenvolvimento de pesquisas em matemática. Assim, é justificável propor uma temática central e ativa para explorar tais ferramentas; sendo a dessa proposta inserida em geometria, análise e métodos algébricos; uma vez que acreditamos que a melhor forma de aprender novos conceitos se dá por bem conhecer problemas abertos e abordáveis.

## 1.3 Ementa pretendida e cronograma e avaliação

### 1.3.1 Conteúdo

A ementa passa por temas como, embora tocando alguns superficialmente:

1. **Aspectos muito preliminares**: Conceitos básicos de geometria riemanniana e semi-riemanniana, ações isométricas e folheações singulares: revisão na medida que os conceitos surgem. Referências básicas: [O'N, GM72, AB15, Pet06, Wal04, Bes87].

2. **Geometria global, curvaturas:** *Curvaturas positivas:* submersões riemannianas, folheações duais, construções clássicas via ações de grupo. *Deformações métricas clássicas em variedades com ações isométricas e folheações*: deformação canônica, deformações de Cheeger, deformações conformes, fluxos de curvatura média e fluxos de Ricci. *Construção de exemplos*: fibrados associados, diagramas estrela, variedades homogêneas e biquocientes. Referências: [Wil01], [Wil07], [Zil07], [Zil14], [ADPR07], [Spe16a], [Spe16b], [CS18], [CeSS18], [CS19].

3. **EDP's geométricas**: *Revisão básica sobre métodos variacionais*: Formulação fraca de problemas elípticos, condição de Palais–Smale, Fluxos de Calor, Categoria de Lusternik–Schnirelmann, Artificial Constraints, Variedades de Nehari, o Teorema do Passo da Montanha e o Princípio de Criticalidade Simétrica. *Aplicações*: Problema de Yamabe, problema de Kazdan–Warner, métricas Einstein e Constantes ótimas em mergulhos de Sobolev. Referências: [PT88], [Pal79], [Yam60], [KW75b], [KW75a], [KW75c], [CaMdOS21].

## 1.4 Cronograma

O cronograma do curso é planejado para que este conte 4 créditos, somando entre 28 e 30 aulas, com planejamento de duas aulas por semana, durante 15 semanas.

## 1.5 Avaliação

A presença e participação nas aulas é essencial e será um dos critérios decisivos para a avaliação. Não haverá provas teóricas, mas em parceria com o aluno, o ministrante oferecerá um assunto e indicação de materiais específicos para a preparação de um seminário escrito e oral. Espera-se também cobrir alguma parte mais aprofundado do conteúdo acima exposto via uma dessas apresentações.

# Referências


[AB15] M.M. Alexandrino and R.G. Bettiol. *Lie Groups and Geometric Aspects of Isometric Actions*. Springer International Publishing, 2015.

[ADPR07] U. Abresh, C. Durán, T. Püttmann, and A. Rigas. Wiedersehen metrics and exotic involutions of euclidean spheres. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. Crelle's Journal*, 605:1–21, 2007.

[Bes87] A.L. Besse. *Einstein Manifolds:*. Classics in mathematics. Springer, 1987.

[CaMdOS21] Leonardo F. Cavenaghi, Jo ao Marcos do Ó, and Llohann D. Sperança. The symmetric Kazdan–Warner problem and applications, 2021.

[CeSS18] Leonardo F. Cavenaghi, Renato J. M. e Silva, and Llohann D. Sperança. Positive ricci curvature through cheeger deformation, 2018.

[CS18] Leonardo F Cavenaghi and Llohann D Sperança. On the geometry of some equivariantly related manifolds. *International Mathematics Research Notices*, page rny268, 2018.

[CS19] L.F. Cavenaghi and L.D. Sperança. Positive ricci curvature on fiber bundles with compact structure group, 2019.

[GM72] D. Gromoll and W. Meyer. An exotic sphere with nonnegative curvature. *Annals of Mathematics*, 96:413–443, 1972.

[KW75a] Jerry L. Kazdan and F. W. Warner. A direct approach to the determination of gaussian and scalar curvature functions. *Inventiones mathematicae*, (28):227–230, 1975.

[KW75b] Jerry L. Kazdan and F. W. Warner. Existence and conformal deformation of metrics with prescribed gaussian and scalar curvatures. *Annals of Mathematics*, 101(2):317–331, 1975.

[KW75c] Jerry L. Kazdan and F. W. Warner. Scalar curvature and conformal deformation of riemannian structure. *J. Differential Geom.*, 10(1):113–134, 1975.

[O'N] B. O'Neill. *Elementary differential geometry*. Academic Press, 2nd edition edition.

[Pal79] Richard S. Palais. The principle of symmetric criticality. *Comm. Math. Phys.*, 69(1):19–30, 1979.

[Pet06] P. Petersen. *Riemannian Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2006.

[PT88] R.S. Palais and C. Terng. *Critical Point Theory and Submanifold Geometry*. Critical Point Theory and Submanifold Geometry. Richard S. Palais, 1988.

[Spe16a] L Sperança. Pulling back the gromoll-meyer construction and models of exotic spheres. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 144(7):3181–3196, 2016.

[Spe16b] Llohann Sperança. On Riemannian foliations over positively curved manifolds. arXiv:1602.01046, 2016.

[Wal04] G. Walschap. *Metric Structures in Differential Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2004.

[Wil01] F. Wilhelm. Exotic spheres with lots of positive curvatures. *J. Geometric Anal.*, 11:161–186, 2001.

[Wil07] B. Wilking. A duality theorem for riemannian foliations in nonnegative sectional curvature. *Geom. Func. Anal.*, 17:1297–1320, 2007.

[Yam60] H. Yamabe. On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds. *Osaka Mathematical Journal*, 12(1):21 – 37, 1960.

[Zil07] Wolfgang Ziller. Examples of riemannian manifolds with non-negative sectional curvature. *Surveys in differential geometry*, 11:63–102, 2007.

[Zil14] W. Ziller. Riemannian manifolds with positive sectional curvature. *Lecture Notes in Mathematics*, 2110, 2014.