Exame de Qualificação, Doutorado
Álgebra Não Comutativa
13 de dezembro de 2019

1. a) (0,5 pt) Definir ideal primitivo de um anel R. Enunciar o teorema sobre a densidade.

b) (1 pt) Mostrar que um anel R $(1 \in R)$ é primitivo (à direita) se e somente se R tem um módulo V_R (à direita) fiel e irredutível.

c) (1 pt) Mostrar que se R $(1 \in R)$ é um anel primitivo então ele é primo. A recíproca desta afirmação é válida?

d) (1 pt) Se $1 \in R$ e R é um anel simples, mostrar que ele é primitivo. A recíproca desta afirmação é válida?

2. a) (0,5 pt) Definir o radical de Jacobson $J(R)$ de um anel R. Qual o radical de Jacobson $J(M_n(F))$ do anel das matrizes $n \times n$ sobre um corpo F?

b) (1 pt) Se R é qualquer anel, mostrar que

$$J\begin{pmatrix} R & R \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(R) & R \\ 0 & J(R) \end{pmatrix}, \qquad J\begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(R) & J(R) \\ J(R) & J(R) \end{pmatrix}.$$

c) (0,5 pt) Se $R = \mathbb{Z}_{210}$, o anel dos resíduos módulo 210, qual o radical de Jacobson dos dois anéis de (b)?

3. a) (1,5 pt) Sejam A e B duas álgebras unitárias sobre o corpo F, e sejam $P \subseteq A$, $Q \subseteq B$ subálgebras contendo os elementos 1 de A e de B, respectivamente. Demonstrar que o centralizador $C_{A\otimes B}(P \otimes Q) = C_A(P) \otimes C_B(Q)$. (Aqui os produtos tensoriais são sobre o corpo F.)

b) (1 pt) Seja D um anel de divisão com centro $Z = Z(D)$ e tal que $\dim_Z D < \infty$. Se K é um subcorpo maximal de D mostrar que $D \otimes_Z K \cong M_n(K)$ para algum número natural n.

c) (0,5 pt) Se D é como em (b), e $L = \overline{Z}$ é o fecho algébrico de Z, mostrar que $D \otimes_Z L \cong M_m(L)$ para algum número natural m.

4. (1 pt) Definir o grupo de Brauer de um corpo F. Explicitar qual a operação neste grupo e justificar que ela é bem definida. Qual o elemento neutro e como são definidos os inversos no grupo de Brauer?

5. a) (0,5 pt) Enunciar o teorema de Burnside sobre os grupos periódicos de matrizes.

b) (1 pt) Se G é um subgrupo periódico de $GL_2(\mathbb{R})$, o grupo das matrizes invertíveis 2×2 com entradas reais, ele é finito?