MÉDIAS

Eduardo Sebastiani Ferreira
SHEM – LEM – UNICAMP

Em Alexandria, durante o reinado de Docleciano (284 - 305), viveu um grande matemático, seguidor das idéias de Eudoxo e Arquimedes, Papus de Alexandria como ficou conhecido. Ele escreveu, por volta de 320, um livro muito importante com o título de *Coleção (*Synagoge). Sua importância é devida à vários fatores; pois contém conteúdos inéditos para época, é uma rica fonte histórica da matemática grega e apresenta provas novas e lemas suplementares para as obras de Euclides, Arquimede, Apolônio e Ptolome.

No livro III, seção 2 da Coleção, Papus teve como preocupação o problema de colocar num mesmo semi-círculo as três médias: aritmética, geométrica e harmônica, mas inicia a seção com as definições pitagóricas destas médias. Assim, dados dois números *a* e *c* (com $c \langle a$), seja *b* com ,$c \langle b \langle a$, então, a razão (*a*-*b*):(b-c) deve ser proporcional a *a:a*=*c:c* para a média aritmética, a *a:b* para a média geométrica e a *a:c* para a harmônica. Assim:

Média aritmética $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a} = \frac{c}{c}$,

Média aritmética $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}$ e

Média harmônica $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$.

A maneira moderna de escrever as médias sai diretamente das proporções acima:

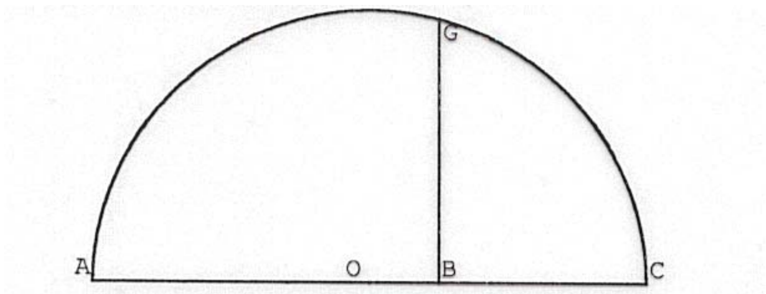
Média aritmética $b = \frac{a+c}{2}$,

Média aritmética $b = \sqrt{a.c}$ e

Média harmônica $b = \frac{2ac}{a+c}$.

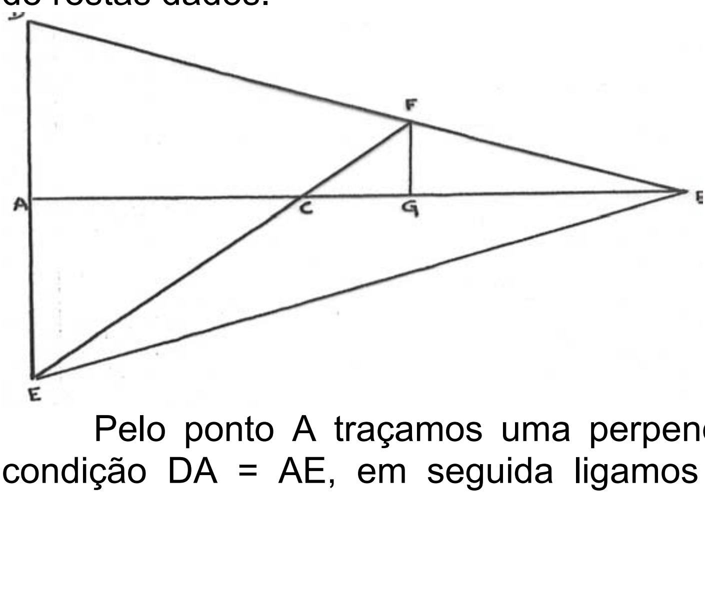
Os números 6, 8, 9 e 12 foram utilizados na música para introduzir o conceito de razão e aqui aparecem de maneira significativa. É fácil verificar que 9 é média aritmética de 6 e 12, e 8 é média harmônica de 6 e 12, ainda mais, $\frac{6}{8}=\frac{9}{12}$ e $\frac{6}{9}=\frac{8}{12}$, isto é, em música o harmônico de cordas de tamanhos 6 e 8 é o mesmo de cordas de tamanhos 9 e 12, isto é uma quarta. Analogamente o harmônico 6 e 9 é uma quinta. Os número 6, 8 e 12 têm propriedades importantes que vêm da música, assim , por darem os harmônicos de oitava e quinta ($\frac{6}{12}$e $\frac{8}{12}$), estão em média harmônica; e, ainda mais, o cubo tem 6 faces, 8 vértices e 12 arestas; este é o motivo dos pitagóricos chamarem o cubo de “corpo harmônico”.

Papus tinha já a construção das médias aritméticas e geométricas de dois segmentos de comprimentos *a* e *c* em um semi-círculo



AB = *a*, BC = *c*, AO = OC = média aritmética e BG = média geométrica.

A primeira construção de Papus para o problema da média foi fazer a seguinte construção para AB = *a* e GB = *c* os dois segmentos de restas dados.



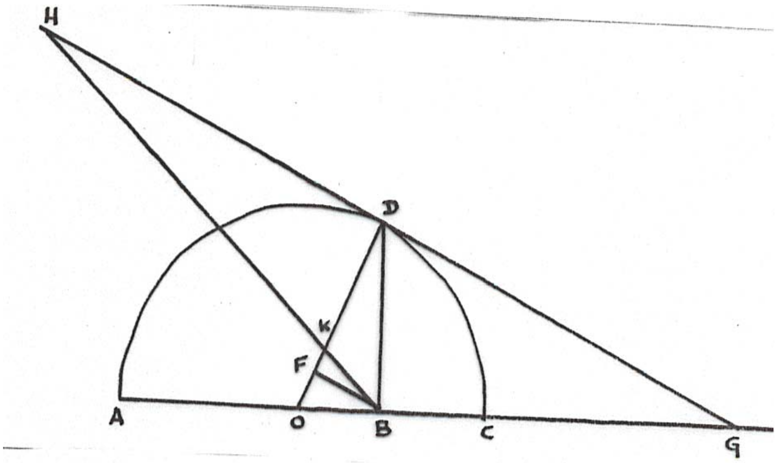
Pelo ponto A traçamos uma perpendicular a AB, DAE, com a condição DA = AE, em seguida ligamos D e E à B. Do ponto G traçamos um perpendicular a AB, que encontra o segmento DB em F. Ligamos, agora, F e E, e este segmento EF encontra AB no ponto C. Então, BC é média harmônica entre AB e BG, pois

AB : BG = DA : FG (semelhança de triângulos)
= EA : FG (por construção)
= AC : CG (semelhança de triângulos)
= (AB -BC) : (BC - BG).

Então, chamando BC = *b*, pela igualdade acima temos

a : c = (a -b) : (b - c).

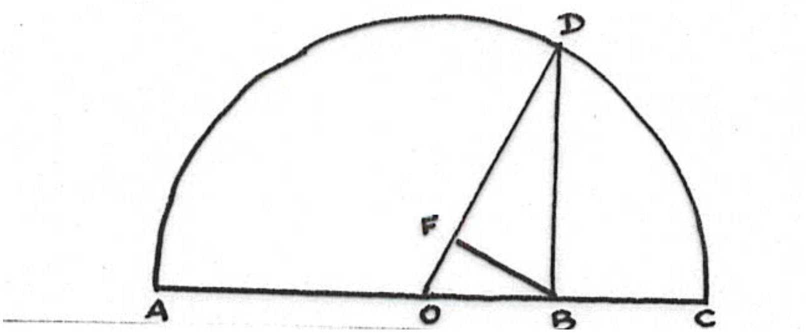
Papus mostra também que se dermos *a* e b podemos achar *c*, e se dermos *b* e *c*, achamos geometricamente *a*. Ele, então, reproduziu o desenho acima sobre o outro e obteve as três médias num mesmo desenho.



Dado o semi-círculo AC de diâmetro ABC (AB = a, BC = c) e centro O, traçamos a perpendicular a AC por B, que encontra do semi-círculo em D. Por D traçamos a tangente ao semi-círculo, isto é, perpendicular em D ao raio OD. Esta tangente vai encontrar o segmento AC em G. Marcamos na tangente o ponto H, tal que HD = DG. Unindo H a B encontramos sobre o raio OD o ponto K. Da mesma maneira que no desenho anterior OK é média harmônica dos segmentos OF e OD, onde F é o pé da perpendicular a OD por B.

Papus, neste desenho, acha as três médias só que a aritmética de AB e BC é AO, a geométrica, também, de AB e BC é BD, mas a harmônica OK é de OF e OD. Por outro lado, ele usou 6 segmentos: DO (= OC), OK, OF, AB, BC e BD.

Um outro geômetra (nota-se o sarcasmo, não cita quem é), diz Papus, resolveu o problema usando somente 5 segmentos e a média harmônica também é entre AB e BC. É um simplificado do anterior sem usar a tangente.



Isto é, DF é a média harmônica entre AB e BC. De fato, com ODB é um triângulo retângulo, e BF é perpendicular a OD, então

DF : BD = BD : DO (semelhança de triângulos)

DF . DO = BD^2 = AB . BC (propriedade de proporções e média geométrica). Mas DO = $\frac{1}{2}$ (AB + BC) (construção do raio), então,

DF. (AB + BC) = 2AB.BC,

ou AB.(DF - BC) = BC. (AB - DF),

isto é, AB : BC = (AB - DF) : (DF - BC) (propriedade das proporções).

Além disso, só foi utilizado 5 segmentos: DO (= OC), DF, AB, BC e BD.

Papus apresenta também nesta seção sete novas médias, algumas delas já apresentadas por Nicômano de Gerasa, aproximadamente no ano 100, no livro “Introduction arithmeticae”.

No quadro abaixo apresento as 10 médias apresentadas pelos dois autores, com $a\langle b\langle c$

Nº em icômaco	Nº em Papus	Fórmula	Equivalente
1	1	$\dfrac{a-b}{b-c} = \dfrac{a}{a} = \dfrac{b}{b} = \dfrac{c}{c}$	$a + c = 2b$ aritmética
2	2	$\dfrac{a-b}{b-c} = \dfrac{a}{b}$	$ac = b^2$ geométrica
3	3	$\dfrac{a-b}{b-c} = \dfrac{a}{c}$	$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{2}{b}$ harmônica
4	4	$\dfrac{a-b}{b-c} = \dfrac{c}{a}$	$\dfrac{a^2 + c^2}{a + c} = b$
5	5	$\dfrac{a-b}{b-c} = \dfrac{c}{b}$	$a = b + c - \dfrac{c^2}{b}$
6	6	$\dfrac{a-b}{b-c} = \dfrac{b}{a}$	$c = a + b - \dfrac{a^2}{b}$
7	(omitiu)	$\dfrac{a-c}{b-c} = \dfrac{a}{c}$	$c^2 = ac - ab$
8	9	$\dfrac{a-c}{a-b} = \dfrac{a}{c}$	$a^2 + c^2 = (b + c)a$
9	10	$\dfrac{a-c}{[illegible]} = \dfrac{b}{[illegible]}$	$b^2 + c^2 = (a + b)c$

Problema: Colocar todas essas médias em um só desenho

Bibliografia

– Boyer, C – "História da Matemática". Edgard Blücher (1974).

– Bunt, L. et al. – "The historical roots of elementary mathematics". Dc (1988).

– Faurel, J. et al. – "The History of Mathematics: A reader". Open Univer (1987).

– Fowler, D. – "Ration early greek mathematics". Bul. Am. Math. Soc. - 1, nº 6, nov. (1979).

– Fowler, D. – "Book II of Euclid's Elements and pre-Eudoxan Theory of Rati Archine for History of Exact Sc. Vol. 22, nº 1/2 (1980).

– Heath, T. – "Euclid. The Thirteen books of The Elements" Dover (1956).

7 – Heath, T. – "A History of Greek Mathematics, Vol. I, II" Dover (1981).

8 – Knorr, W. – "Archimedes and the Pre-euclidean proportion Theory". Arch Int. Hist. Sc. Vol. 28 (1978).

9 – Szabó, A. – "Les débuts des Mathématiques Grecques". J. Vrim (1977).

10 – Toeplitz, O. – "The calculus. A genetic approach". Univ. of Chicago P (1967).

11 – Van der Werden, B. – "Geometry and Algebra in Ancient Civilizatic