Prova 2 - Resolução

1) (a) Definição: Dado $\varepsilon>0$ existe $M>0$ tal que

$$x>M \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$$

(b) Dado $\varepsilon>0$, seja $M \geq \frac{1}{\varepsilon}$, então

$$x>M\geq \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow \left|\frac{x+1}{x}-1\right| = \frac{1}{x}<\varepsilon.$$

---

2) (a) Se c é máximo então $f(x)\leq f(c)$ para x numa vizinhança de c, então

$$f'(c)=\lim_{x\to c^-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0 \quad \text{e} \quad f'(c)=\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0$$

logo $f'(c)=0$

(b) Assuma por contradição que f assume máximo no ponto c interior de $[a,b]$, então $f(a)<f(c)$ e $f(b)<f(c)$. Por outro lado, temos pela fórmula de Taylor que

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{f''(\bar{x})}{2!}(x-c)^2$$

Com $f'(c)=0$ e $f''(\bar{x})\geq 0$ temos que $f(x)\geq f(c)$ $\forall x\in[a,b]$ que é uma contradição, pois $f(a)<f(c)$.

---

3) (a) Temos que $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots$

Para $x>0$, todos os termos da série são positivos, logo

$$e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

(b) Dessa desigualdade segue que $\frac{x^n}{e^x}<\frac{(n+1)!}{x}$

logo $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=0.$

---

4) f é lipschitziana $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$. Se $x_n \in (a,b)$ e $x_n \to a$ temos que (x_n) é de Cauchy logo existe n_0 tal que $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{M}$ se $n, m \geq n_0$.

Portanto

$$|f(x_n)-f(x_m)| \leq M|x_n - x_m| < \varepsilon \Rightarrow (f(x_n)) \text{ é de}$$

Cauchy, portanto convergente. Seja $l = \lim f(x_n)$, vamos mostrar que $l = \lim f(y_n)$ qualquer que seja a sequência (y_n), $y_n \in (a,b)$ e $y_n \to a$. Escolha $\bar{n}_0$ tal que

$$|x_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{M} \text{ se } n, m \geq \bar{n}_0 \text{ então}$$

$$|f(x_n) - f(y_m)| < M|x_n - y_m| < \varepsilon \text{ se } n, m \geq \bar{n}_0.$$

Fazendo $n \to \infty$ obtemos

$$|l - f(y_m)| \leq \varepsilon \text{ se } m \geq \bar{n}_0, \text{ portanto}$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l.$$