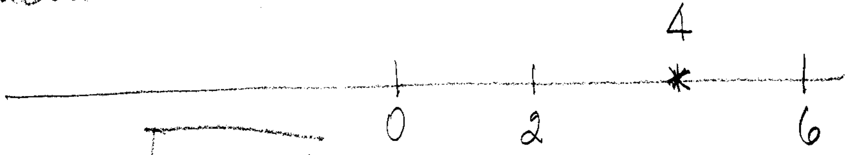
GABARITO — 1ª PROVA

1) a) Os dois lados da desigualdade são positivos. Então podemos elevar ao quadrado os dois lados sem alterar o signal da desigualdade. Então

$$|x-2|^2 < |x-6|^2 \iff (x-2)^2 < (x-6)^2 \iff \cancel{x^2} - 4x + 4 < \cancel{x^2} - 12x + 36$$

$$\iff 8x < 32 \iff \boxed{x < 4}.$$

Outra maneira, e mais fácil, é observar que $|x-b| =$ distância de x a b, portanto a desigualdade diz que a distância de x a 2 é menor que a distância de x a 6



Portanto $\boxed{x < 4}$.

b) A sugestão é mostrar que a sequência é monótona. Temos que calcular o sinal de $a_{n+1} - a_n$

$$a_{n+1} = \cancel{\frac{1}{n+2}} + \dots + \cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \quad \text{e}$$

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \cancel{\frac{1}{2n}}. \quad \text{Então}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+2}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0 \text{ pois } 2n+2 > 2n+1$$

portanto (a_n) é crescente.

Precisamos agora mostrar que (a_n) é limitada, a_n é a soma de $\underline{n}$ termos positivos, sendo que o maior deles é $\frac{1}{n+1}$, portanto

$a_n < n \cdot \frac{1}{n+1}$, por outro lado (a_n) é crescente, logo $a_n \geq a_1 = \frac{1}{2}$. Logo

$$\frac{1}{2} \leq a_n < \frac{n}{n+1} < 1.$$

---

2) a) Se (a_n) é limitada, então existe uma constante $k>0$ tal que $|a_n| \leq K \ \forall n$. Então

$$|a_n b_n| \leq |a_n||b_n| \leq K|b_n| \to 0, \text{ pois } b_n \to 0.$$

b)

$$\frac{n!}{n^n} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{b} \cdot \underbrace{\frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdots \frac{n}{n}}_{a_n}, \text{ então}$$

$b_n = \frac{1}{n} \to 0$ e a_n é limitada, pois é o produto de frações menores ou iguais a 1, logo $|a_n| \leq 1$.

Portanto usando a parte a) $\frac{n!}{n^n} \longrightarrow 0$.

---

3) a) Sabemos que $\sqrt[n]{n} \geq 1$, então podemos escrever que $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ onde $h_n \geq 0$. Então

$$n = (1+h_n)^n = 1 + n h_n + \frac{n(n-1)}{2!} h_n^2 + \cdots n h_n^{n-1} + h_n^n. \quad (*)$$

Desenvolvemos usando o Binômio de Newton

Então para $n \geq 2$

$$n > \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 \iff 0 \leq h_n^2 < \frac{2}{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq h_n < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \to 0. \text{ Portanto } h_n \to 0$$

e $\sqrt[n]{n} \to 1$.

b) Usando novamente $(*)$ temos que

$$n > n h_n^{n-1} \iff 0 \leq h_n^{n-1} < 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (h_n^{n-1})$ é limitada. Portanto

$h_n^n = h_n h_{n-1}^{n-1} \to 0$, pois (h_n^{n-1}) é limitada e

$h_n \to 0$ pela parte a). Então como

$$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n \to h_n = \sqrt[n]{n} - 1 \Rightarrow h_n^n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$

temos que $(\sqrt[n]{n} - 1)^n \to 0$.

---

4) Sejam $\limsup a_n = a$ e $\limsup b_n = b$, então dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_n < a + \varepsilon \quad \text{e} \quad b_n < b + \varepsilon, \text{ se } n \geq n_0.$$

Então

$$a_n + b_n < a + b + 2\varepsilon \text{ se } n \geq n_0.$$

Como ε é arbitrário, temos que

$$\limsup (a_n + b_n) \leq a + b$$

b) Tome $a_n = (-1)^n$ e $b_n = (-1)^{n+1}$ então

$\limsup a_n = 1$ e $\limsup b_n = 1$ e

$a_n + b_n = 0 \ \forall n$, portanto

$\limsup (a_n + b_n) = 0 < \limsup a_n + \limsup b_n = 2.$