Números Reais

I- Revisar os conceitos de Conjuntos e de funções

1) $x \in X$ pertinência

2) $A \subset X$ inclusão $\quad x \in A \Rightarrow x \in X$.

3) $\mathcal{P}(A)$ conjunto das partes = conjunto formado por todos os subconjuntos de A.

etc...

Os conjuntos na maioria das vezes são definidos especificando uma propriedade de seus elementos

$$X = \{x \in E \,/\, x \text{ goza da propriedade } P\}$$

Ex: $X = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x > 5\}$

Quando não existe nenhum elemento que satisfaz a propriedade P dizemos que o conjunto é vazio. Por exemplo

$$\{x \,/\, x \neq x\}$$

Nesse caso temos que qualquer que seja x, $x \notin \emptyset$.

Observe que somos obrigados a admitir que $\emptyset \subset X$ qualquer que seja X, porque se fosse $\emptyset \not\subset X$ existiria um $x \in \emptyset$ tal que $x \notin X$ que é uma contradição. Portanto, o conjunto vazio $\emptyset$ pertence a $\mathcal{P}(X)$ qualquer que seja X, em particular $\emptyset \in \mathcal{P}(\emptyset)$.

Funções – (Revisar as definições)

Conjuntos Numéricos

$\mathbb{N}$ = Números Naturais

$\mathbb{Z}$ = " Inteiros

$\mathbb{Q}$ = " Racionais

Vamos assumir que esses conjuntos numéricos são conhecidos, suas operações e propriedades. Por exemplo que $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado. Isto é, $\mathbb{Q}$ possui uma relação de ordem e suas operações satisfazem as propriedades de Corpo:

(+) Comutativa $x+y=y+x$

Associativa $x+(y+z)=(x+y)+z$

Elemento Neutro $\exists\, 0$ tal que $x+0=x \quad \forall x$.

Simétrico (ou oposto) $\forall x \ \exists\,(-x)$ tal que $x+(-x)=0$

($\cdot$) Comutativa $x.y=y.x$

Associativa $x.(y.z)=(x.y).z$

Elemento neutro $\exists\, 1$ tal que $x.1=x \quad \forall x$.

Inverso $\forall x\neq 0$ existe $x^{-1} \,/\, x.x^{-1}=x$.

Distributiva: $x.(y+z)=xy+xz$

Lista de exercícios pg 5, livro do Djairo.

Ex 6: Se F é um corpo, mostrar que $0x=0 \quad \forall x\in F$

Solução: Observe que num corpo vale a propriedade do cancelamento, isto é, $x+p=y+p \Rightarrow x=y$, basta somar o oposto de p nos dois lados da igualdade $x+p=y+p$.

Então como

$$0.x \underset{\text{el. neutro}}{=} (0+0).x \underset{\text{distrib.}}{=} 0.x+0.x \underset{\text{cancel.}}{\Rightarrow} \boxed{0=0.x}.$$

Um corpo F é ordenado se existe um subconjunto $P \subset F$, chamado de elementos positivos, tal que

a) $x, y \in P \Rightarrow x+y \in P$ e $x \cdot y \in P$

b) Dado $x \in F$ então uma e somente uma das alternativas ocorre:

$$x \in P, \quad -x \in P, \quad x = 0$$

Nesse caso definimos a relação de ordem

$$x > y \text{ se } x - y \in P$$

que satisfaz as propriedades

Reflexiva : $x \leq x$, $\forall x \in F$

Anti-simétrica $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$

Transitiva $x \leq y$ e $y \leq z \rightarrow x \leq z$.

$\boxed{\text{Exercícios pg 6}}$

Supremo e Ínfimo

Seja F um corpo ordenado e $A \subset F$ um subconjunto

Cota superior: Um elemento $x \in F$ tal que $x \geq a$, $\forall a \in A$ é chamado de cota superior de A.

Cota inferior Um elemento $x \in F$ tal que $x \leq a$ $\forall a \in A$ é chamado de cota inferior de A.

Um subconjunto A que possui cota superior é chamado de conjunto limitado superiormente e se possui cota inferior dizemos que é limitado inferiormente.

SUPREMO. O supremo de um subconjunto $A \subset F$, $\sup A$, (quando existe). Mais é a menor das cotas superiores precisamente:

$\sup A = x$ se:

(i) x é cota superior, isto é, $x \geq a \quad \forall a \in A$.

(ii) Se z é cota superior então $x \leq z$.

Exemplo: Tome $F = \mathbb{Q}$ e

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \; / \; 0 < x < 1\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} \; / \; 0 \leq x \leq 1\}$$

É fácil ver que $\sup A = \sup B = 1$.

Ínfimo: O ínfimo de um subconj. A é a maior das cotas inferiores (quando existe) ou + precisamente:

$\inf A = x$ se:

(i) $x \leq a \quad \forall a \in A$

(ii) Se z é cota inferior então $z \leq x$.

No exemplo acima $\inf A = \inf B = 0$

Exemplo: $A = \{x \in \mathbb{Q} \; / \; 0 < x \text{ e } x^2 < 2\}$

Mostrar que A não tem supremo e é limitado superiormente.

Considere o conjunto $B = \{x \in \mathbb{Q} \; / \; x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}$.

Como não existe $x \in \mathbb{Q} \; / \; x^2 = 2$ (mostre!) temos que

$A \cup B = \mathbb{Q}^+ =$ números racionais positivos.

Vamos mostrar que se $x \in A$ então existe $y \in A \; / \; y > x$ (1)

Se $x = \frac{p}{q}$ vamos procurar y na forma $y = \frac{p}{q} + \frac{1}{nq} =$

$$= \frac{np + 1}{nq}.$$

Então, é preciso que

$$y^2 = \frac{n^2p^2+2np+1}{n^2q} < 2 \iff (2q-p^2)n^2 - 2pn - 1 > 0$$

Como $x = \frac{p}{q} \in A$ temos que $\frac{p^2}{q^2} < 2 \iff 2q^2 - p^2 > 0$.

Portanto tomando n maior que a maior das raízes de $(2q-p^2) - 2pn + 1$ obtemos o y desejado.

De modo análogo mostramos que

Se $x \in B$ então existe $y \in B$ / $y < x$ (2)

Suponha que $\sup A = x_0$ então $x_0 \notin A$ por (1) e $x_0 \notin B$ por (2) logo $\sup A$ não existe.

Números Reais

Def: O conjunto $\mathbb{R}$ dos números é o corpo ordenado que satisfaz o Postulado de Dedekind

"Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado inferiormente tem ínfimo"

Exercício pg 9 e pg 11

1) Se $B \overset{\neq \phi}{\subset} \mathbb{R}$ é limitado superiormente, isto é, tem cota superior, então B tem supremo e $\sup B = -\inf(-B)$

Solução: $-B$ é limitado inferiormente. Tome

$$x_0 = \inf(-B)$$

Então $x_0 \leq -b, \forall b \in B \iff -x_0 \geq b, \forall b \in B$, logo $-x_0$ é cota superior para B. Vamos mostrar que a menor

Suponha que não, isto é, existe $\varepsilon > 0$ tal que $-x_0 - \varepsilon$ é cota superior p/ B, então

$$-x_0 - \varepsilon \geq b, \forall b \in B \iff x_0 + \varepsilon \leq -b, \forall b \in B,$$

que é uma contradição, pois x_0 não seria a maior das cotas inferiores de $(-B)$.

2) Se $x, y \in \mathbb{R}^+$ são então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$nx > y$$

Solução: $A = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$

Suponha por absurdo que $nx \leq y$ $\forall n \in \mathbb{N}$, então A é limitado superiormente. Seja $a_0 = \sup A$ então existe $n \in \mathbb{N}$ /

$$a_0 - x < nx$$

logo

$$a_0 < (n+1)x$$

que é absurdo, pois a_0 não seria cota superior de A.

Def: Todo Corpo que satisfaz 2) é chamado de Arquimediano.

Como consequência de 2):

a) Se $x > 0$ então $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < x$ (basta tomar $y = 1$ em 2))

b) $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente (basta tomar $x = 1$ em 2)). $\forall y \in \mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ /

$$n > y.$$

3) A equação $x^2 = 2$ admite uma única solução positiva.

Solução:

Seja $b = \sup B$ onde $B = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}$

Vamos mostrar que $b^2 = 2$.

Suponha que $b^2 < 2$ então é fácil mostrar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(b + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$$

portanto $\left(b + \frac{1}{n}\right) \in B$ que é absurdo pois $\sup B = b$.

De modo análogo temos que b^2 não pode ser maior que 2, logo $b^2 = 2$.

Unicidade: Suponha que existe $b' \in \mathbb{R}$ positivo tal que $(b')^2 = 2$ então $b^2 - (b')^2 = 0 \iff (b - b')(b + b') = 0$. Como $b + b' > 0$ então devemos ter $(b - b') = 0 \iff b = b'$.

Desigualdades

Def: $$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Do ítem 3) acima temos que existe um único número positivo b tal que $b^2 = 2$. Chamaremos esse número de $\sqrt{2}$

De modo análogo pode-se mostrar que

a equação $x^2 = a$, com $a > 0$, tem uma única solução positiva, chamamos essa solução x de $\sqrt{a}$.

Como $|c|^2 = c^2$ então $x = |c|$ é sol. positiva de $x^2 = c^2$, logo temos

$$\sqrt{c^2} = |c| \text{ para qualquer } c \in \mathbb{R}.$$

Justificar as seguintes desigualdades:

1) Se $a, b > 0$ então

$$a < b \iff \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

2) $|ab| = |a||b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

3) $|a+b| \leq |a| + |b|$ (desigualdade triângular)

4) $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$ (2ª desigualdade triângular)

Estamos supondo que os exercícios da pg 6 já foram resolvidos e podemos utilizar os resultados.

1) $a < b \iff b - a > 0 \overset{a \text{ e } b \text{ são positivos}}{\iff} (\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a})^2 > 0 \iff$
$(\sqrt{b} - \sqrt{a})\underbrace{(\sqrt{b} + \sqrt{a})}_{\text{é positivo}} > 0 \iff \sqrt{b} - \sqrt{a} > 0 \iff \sqrt{a} < \sqrt{b}.$

Observe que o exercício 1) é equivalente a
Se a, b são positivos, então

$$a^2 < b^2 \iff a < b.$$

2) Vamos usar a unicidade da solução positiva de
$$x^2 = a^2 b^2.$$
É fácil ver que $x = |ab|$ é solução pois
$x^2 = |ab|^2 = (ab)^2 = a^2 b^2$. e também

$x = |a||b|$ é solução pois

$x^2 = (|a||b|)^2 = |a|^2 |b|^2 = a^2 b^2$, como são positivas
devem ser iguais
$$|ab| = |a||b|.$$
Essa igualdade pode ser verificada estudando os casos possíveis: $a>0$ e $b>0$; $a>0$ e $b<0$.

3)
$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \underset{\text{usando que } x \le |x|}{\le} a^2 + 2|ab| + b^2$$
$$= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 = (|a|+|b|)^2$$
isto é, $\quad |a+b|^2 \le (|a|+|b|)^2$
Usando 1) obtemos a desigualdade triangular.

4) Vamos usar 3) e a equivalência
$$|x| \le a \iff -a \le x \le a$$
$$|a| = |a+b+(-b)| \underset{\text{desig. 3)}}{\le} |a+b| + |-b| = |a+b| + |b|$$
logo
$$|a| - |b| \le |a+b| \quad (1)$$
Analogamente
$$|b| = |a+b+(-a)| \le |a+b| + |a| \Rightarrow$$
$$|b| - |a| \le |a+b| \iff \quad |a| - |b| \ge -|a+b| \quad (2)$$

- De (1) e (2) obtemos

$$-|a+b| \leq |a|-|b| \leq |a+b|$$

$\iff$

$$\big||a|-|b|\big| \leq |a+b|.$$

Definir intervalos abertos, fechados, distancia $|x-a|$, etc

Exercícios pg 15.