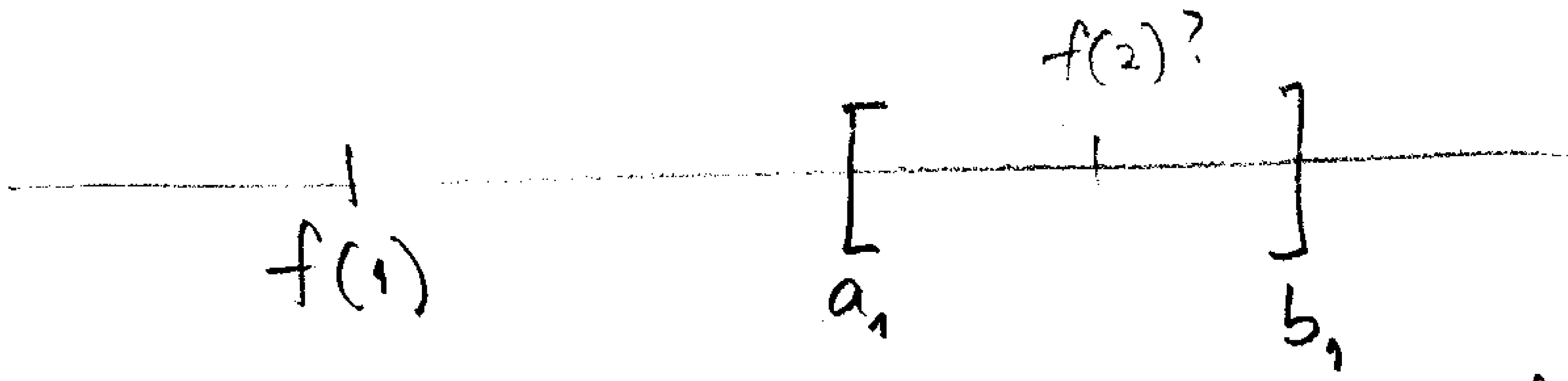
Conjuntos Não Enumeráveis

$\mathbb{R}$ não é enumerável

Vamos mostrar que não existe uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que seja sobrejetora

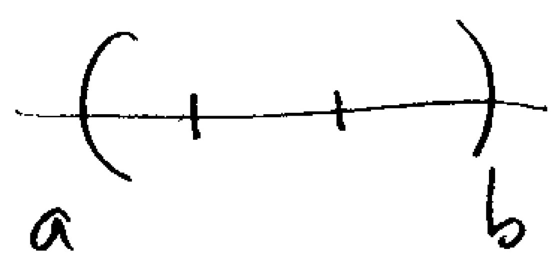
Dem: Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Vamos construir intervalos encaixados I_n tais que $f(n) \in I_n$ para todo n. Seja $I_1 = [a_1, b_1]$ tal que $f(1) \notin I_1$.

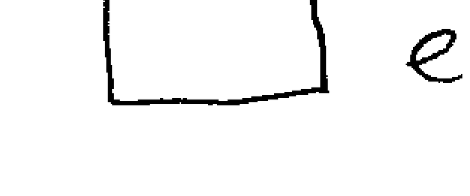


Se $f(2) \notin I_1$ colocamos $I_2 = I_1$. Se $f(2) \in I_1$ escolhemos $I_2 \subset I_1$ de modo que $f(2) \notin I_2$ e assim por diante.

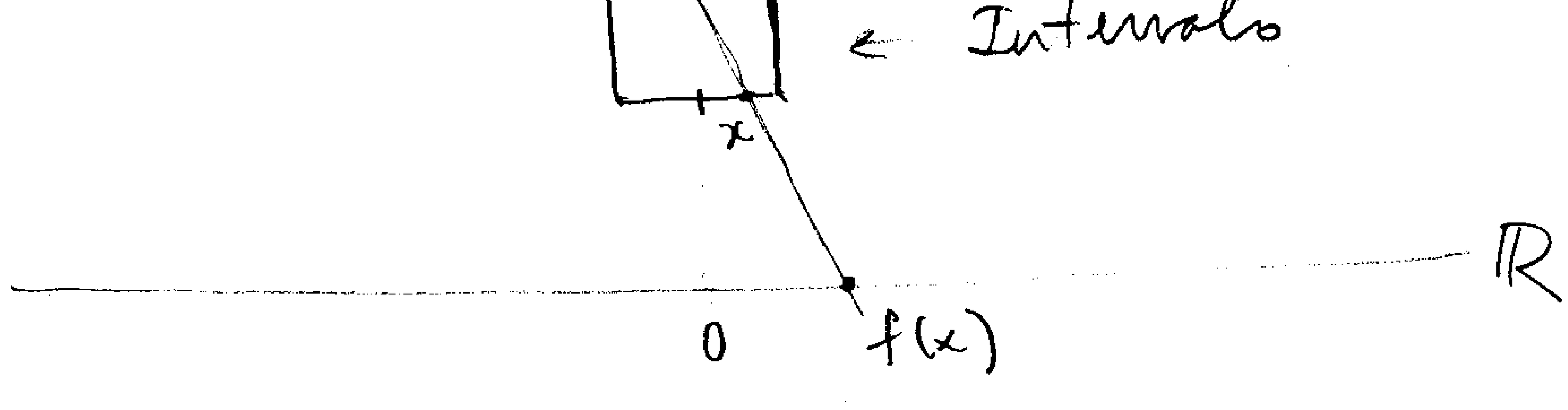
Então pelo Teorema dos Intervalos Encaixados tem que existe $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, então $f(n) \neq c \ \forall n$ e portanto f não é sobrejetora.

Observe também que existe $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ bijetora qualquer que seja o intervalo (a,b). Construa a função de acordo com o diagrama.



Dobre o intervalo na forma 

e defina



Temos portanto que $\mathbb{N} < \mathbb{R}$ e $\text{card}(a,b) = \text{card}\,\mathbb{R}$.
Outra maneira de se demonstrar que $\mathbb{R}$ não é enumerável

Teorema (Cantor)

$(0,1)$ não é enumerável

Dem: Qualquer número de $(0,1)$ pode ser representado, de modo único, na forma decimal infinita $0,x_1x_2x_3\ldots$

Por exemplo $0,2$ é representado por $0,1999\ldots$ Suponha que exista $f: \mathbb{N} \to (0,1)$ bijetora, então

$$f(1) = 0,a_1a_2a_3\ldots$$
$$f(2) = 0,b_1b_2b_3\ldots$$
$$f(3) = 0,c_1c_2c_3\ldots$$

Considere agora o número $x = 0,x_1x_2x_3\ldots$ tal que $x_1 \neq a_1$, $x_2 \neq b_2$, $x_3 \neq b_3$ assim por diante então $x \in (0,1)$ e $x \neq f(n)$, $\forall n$, logo f não é sobre, contradição.

Conjunto das Partes

Dado um conjunto X o conjunto das partes de X, $P(X)$ é o conjunto formado por todos os subconjuntos de X.

Ex. $X = \{1,2,3\}$

$$P(X) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Observe que o número de elementos de $P(X)$ é dado por

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3},$$ onde $\binom{n}{k}$ indica a combinação de n elementos k a k.

De modo geral, se X tem n elementos então $P(X)$ tem

Binômio de Newton

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n} \overset{\swarrow}{=} (1+1)^n = 2^n$$ elementos, então

$X < P(X)$ (ou $\text{card}\, X < \text{card}\, P(X)$). Esta desigualdade é verdadeira mesmo que X seja infinito.

<u>Teorema</u>: Qualquer que seja o conjunto X tem que $X < P(X)$ (+ precisamente $\text{card}(X) < \text{card}(P(X))$.)

<u>Dem</u>: A função $f: X \longrightarrow P(X)$, $x \longmapsto \{x\}$ é injetiva, portanto

$X \leq P(X)$. Para mostrar que $X < P(X)$ precisamos mostrar que não existe $f: X \to P(X)$ que seja sobrejetora.

Dada $f: X \longrightarrow P(x)$ considere o conjunto

$$A = \{x \in X \text{ tal que } x \notin f(x)\}.$$

O conjunto A é subconjunto de X, podendo ser vazio, e não existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = A$, pois se existisse tal x_0, então

$x_0 \in A$ e portanto $x_0 \notin f(x_0) = A$ contradição

ou

$x_0 \notin A = f(x_0)$ e portanto $x_0 \in A$ contradição.

Portanto temos que $P(\mathbb{N})$ é não enumerável.

Vamos denotar por $\mathcal{F}(X, Y)$ o conjunto de todas as funções de X em Y. Observe que se X tem $\underline{n}$ elementos e Y tem 2 elementos então $\mathcal{F}(X, Y)$ tem 2^n elementos que o mesmo número de elementos de $\mathcal{P}(X)$. Na verdade temos que para qualquer conjunto X existe uma bijeção

$$\varphi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(X, \{0,1\}).$$

Para cada $A \in \mathcal{P}(X)$, isto é, um subconjunto $A \subset X$ defina $\varphi(A) = g_A \in \mathcal{F}(X, \{0,1\})$ por

$$g_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin A \\ 1 & \text{se } x \in A \end{cases}$$

Essa função g_A é chamada de função característica de A.

A função φ é bijetora. Que φ é injetora é imediato, e dado $f \in \mathcal{F}(X, \{0,1\})$, isto é, $f : X \to \{0,1\}$, considere

$$A = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$$

então $\varphi(A) = f$ e φ é sobrejetora.

Podemos afirmar, então que $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\})$ são exemplos de conjuntos não enumeráveis.

Ainda, dado um conjunto qualquer X sempre existe um conjunto com cardinalidade maior que X, pois $\operatorname{card} X < \operatorname{card}(\mathcal{P}(X))$