- ANÁLISE 1

Números Naturais, conjuntos finitos e Infinitos

O conjunto dos números Naturais é construído à partir dos axiomas de Peano e da noção de sucessor.

1) Todo número Natural $n \in \mathbb{N}$ tem um único sucessor $s(n) \in \mathbb{N}$

2) Existe um único número Natural, indicado por 1, que não é sucessor de nenhum outro

3) Se m e n têm o mesmo sucessor então $m=n$, isto é, a função sucessor é injetiva.

4) Princípio de Indução. Se $X \subset \mathbb{N}$ é tal que

a) $1 \in X$

b) $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$

Então $X = \mathbb{N}$.

Usando os axiomas de Peano podemos construir toda a teoria dos números Naturais. Pode-se definir por exemplo a adição

Definição $n+m = s^m(n)$

Em particular se $m=1$ temos que $s(n) = n+1$, isto é, o sucessor de n é $n+1$. Podemos demonstrar que essa operação tem as propriedades comutativa, associativa etc. e também podemos definir a ordem

$$m<n \iff \exists\, p \in \mathbb{N} \;/\; n = m+p$$

Princípio da Boa Ordenação

Teorema
Todo subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ não vazio possui um primeiro elemento (um elemento mínimo).

Dem: Seja $X = \{ n \in \mathbb{N} \,/\, \forall\, m \leq n \Rightarrow m \notin A \}$

Se $1 \in A$ está demonstrado, 1 será o primeiro elemento de A.

Se $1 \notin A$ então $1 \in X$ e $X \neq \mathbb{N}$ (os elementos de A não estão em X) então, pelo Princípio da Indução, item b), existe $n \in X$ tal que $(n+1) \notin X$, portanto $(n+1)$ é o primeiro elemento de A.

O princípio da Boa Ordenação é importante porque podemos ordenar os elementos que qualquer subconjunto dos Naturais. Se $X \overset{\neq\emptyset}{\subset} \mathbb{N}$ temos que X possui primeiro elemento. Seja x_1 esse elemento, então $X - \{x_1\}$ também tem primeiro elemento digamos x_2, dessa forma podemos construir uma função (função ordem), que associa a cada elemento de X um número Natural correspondente à sua ordem.

Conjuntos Finitos e Infinitos

Seja $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

Definição: Um conjunto X é chamado <u>finito</u> se $X=\emptyset$ ou se existe uma função

$$\varphi: X \to I_n, \quad I_n=\{1,2,\dots n\}$$

bijetora. Escrevemos $\#(X)=n$

O conjunto X é enumerável se X é finito ou se existe uma função

$$\varphi: X \to \mathbb{N}$$

bijetora.

<u>Observação importante</u>: Se I é um subconjunto de $\mathbb{N}$ então I é enumerável. De fato, se I for finito então I é enumerável. Se I for infinito vamos considerar a função ordem

$$\varphi: I \to \mathbb{N}$$

definida da seguinte forma. Pelo Princípio da Boa Ordenação o conjunto I tem primeiro elemento, seja x_1 esse elemento, defina $\varphi(x_1)=1$, depois considere o primeiro elemento x_2 de $I-\{x_1\}$ e defina $\varphi(x_2)=2$. e assim sucessivamente. Observe que dessa forma a função φ fica definida para qualquer $x\in I$, pois o conjunto $I_x=\{n\in I : n<x\}$ é finito e x é o primeiro elemento de $I-I_x$, portanto $\varphi(x)=\#(I_x)+1$. φ está bem definida, é injetora (verifique) e é também sobrejetora. A justificativa que φ é sobrejetora pode ser feita por Indução

a) $1\in \operatorname{Im}\varphi$ (imediato)

b) $n\in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow (n+1)\in \operatorname{Im}\varphi$ (pois I é infinito)

logo $\operatorname{Im}\varphi=\mathbb{N}$.

Usando a observação da página anterior podemos demonstrar que

<u>Teorema</u>: $X \neq \phi$ é enumerável, se, e somente se, existe uma função
$$f: X \longrightarrow \mathbb{N}$$
<u>injetora</u>

<u>Dem</u>: Se X é enumerável podemos tomar f como sendo a função φ da definição.

Suponha que $f: X \longrightarrow \mathbb{N}$ é injetora, então se Imf é finito, tem que X é finito e portanto enumerável. Se X é infinito, temos que $I = Imf$ é infinito e contido em $\mathbb{N}$, então a função ordem $\varphi: I \longrightarrow \mathbb{N}$ é bijetora (obs. anterior) e portanto a função composta $\varphi \circ f: X \longrightarrow \mathbb{N}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\varphi \circ f"'] & I = Imf \arrow[r, "\varphi"] & \mathbb{N} \end{tikzcd}$$

é bijetora, e portanto X é enumerável

<u>Exemplos e exercícios</u>

1) O conjunto dos números pares $P = \{2, 4, 6, \dots\}$ é enumerável (tome $\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow P$, $\varphi(n) = 2n$)

2) Mostre que o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é enumerável

3) Mostre que a reunião de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

4) Mostre que subconjunto de conjunto enumerável é enumerável (5)

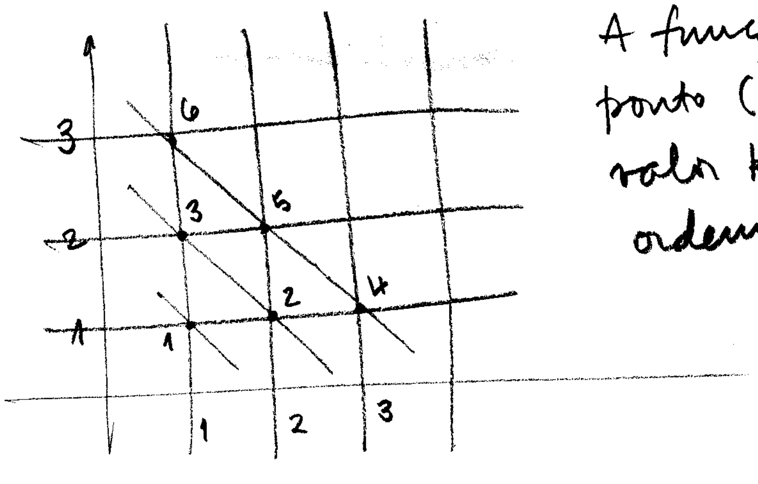
5) Mostre que o conjunto dos números racionais positivos é enumerável

Sug: $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
$(n, m) \longrightarrow 2^n 3^m$

ou

$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$f(n,m) = \frac{(n+m-2)(n+m-1)}{2} + m$$



A função associa o ponto (n, m) com o valor k dado pela ordem ao lado.

6) Mostre que o sucessor $s(n) \neq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Sug: Use indução. Tome
$$X = \{ n \in \mathbb{N} \,/\, s(n) \neq n \}$$
Então
a) $1 \in X$ pelo axioma 2)
b) Se $\underline{n \in X}$, isto é, $s(n) \neq n$ então pelo axioma 3) $s(s(n)) \neq s(n)$ logo $\underline{s(n) \in X}$ e portanto por indução $X = \mathbb{N}$.