

Introdução às Equações Diferenciais

Cáceres, 26 a 31 de julho de 2004

5ª Aula - Dia 30/06/2004

Assuntos a serem cobertos na aula:

1. Aplicações, o que o tempo permitir entre os tópicos:
 - (a) Queda livre de corpos (pág. 120 da ref. 2)
 - (b) Equação do pêndulo simples (pág. 140 da ref. 2)
 - (c) Oscilador harmônico (vibrações mecânicas e elétricas) (seção 3.8 - pág. 99 do livro texto ou pág 137 da ref 2)
2. Equações lineares de ordem mais alta (Capítulo 4 - pág. 112)
3. Revisão sobre séries de potências (seção 5.1 - pág. 124)
4. Solução de equações em série de potências (seção 5.2 - pág. 128).

Exercícios

1. Desprezando a resistência do ar, quanto tempo gasta uma pessoa de 80 kg para chegar ao solo caindo de uma altura de 3m? Qual é a velocidade de impacto no solo? O tempo e a velocidade dependem do peso da pessoa? Conclua a lei de Torricelli: um corpo caindo de uma altura h , atinge o solo com uma velocidade v dada pela fórmula $v = \sqrt{2gh}$.
2. O livro texto utiliza o sistema inglês de medida nos seus problemas, portanto, a sugestão para aqueles que não estão familiarizados com este sistema de medida, é que primeiramente leiam os exemplos 1 e 2, resolvidos nas páginas 101 e 102 respectivamente, e após resolvam pelo menos 2 exercícios da lista de problemas da página 105 do livro texto.
3. Lista de problemas da página 117 do livro texto.
1, 4, 11, 13, 15, 18, 39
4. Lista de problemas da página 127 do livro texto.
1, 2, 6, 7, 19, 20, 21, 22.
5. Determine a série de potências de x para as funções
$$\sin x, \cos x, e^x, 1/(1-2x), 1/(3x+5)$$
6. Lista de problemas da página 133 do livro texto.
1, 2, 3.

Exercícios opcionais

1. Encontrar o intervalo de convergência das seguintes séries de potências (Verificar a convergência nos extremos dos intervalos)

$$\begin{aligned} a) \sum \frac{n^2+1}{n!} x^n & \quad b) \sum \frac{(-1)^n (x-3)^n}{n!} \\ c) \sum \frac{3^n}{n^2} (2x-1)^n & \quad d) \sum \frac{1}{n+2} x^{2n+1} \\ e) \sum \frac{1}{\sqrt{2n+1}} (x+2)^n & \quad f) \sum \frac{1}{(\ln n)^n} (x-1)^n \end{aligned}$$

2. Encontrar uma representação por série de potências de x para as seguintes funções

$$\begin{aligned} a) \frac{1}{1-2x} & \quad b) \frac{1}{1+4x^2} \\ c) \frac{x}{1+4x^2} & \quad d) \frac{x-1}{x+1} \\ e) \frac{8x}{(1+x^2)^2} & \quad f) \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{aligned}$$

3. Encontrar uma representação por série de potências em torno do ponto a indicado e determinar o raio de convergência.

$$\begin{aligned} a) e^{2x}, \quad a = 0 & \quad b) \cos x, \quad a = \pi/4 \\ c) 1 + x^3, \quad a = 2 & \quad d) \ln(3+x), \quad a = 1 \\ e) 2^x, \quad a = 0 & \quad f) \frac{\sin x}{x}, \quad a = 0 \end{aligned}$$

4. Determine o valor das quantias abaixo com erro inferior a 0.001

$$a) \sin 2 \quad b) \ln(1, 1) \quad c) \int_0^{1/4} \frac{1}{1+x^2} dx$$

5. Se $f(x)$ tem derivadas de todas as ordens e $f^{(n)} = 0$ para $n \geq N$, podemos afirmar que $f(x)$ é um polinômio de grau menor que N ?

6. Se N é um número natural, verifique se a solução de

$$\dot{x} = x - \frac{t^N}{N!}, \quad x(0) = 1,$$

é um polinômio.

7. Seja

$$f(x) = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-(n-1))}{n!} x^n, \quad |x| < 1.$$

Mostre que $f(x) = (1+x)^m$. Sugestão: calcule $\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{(1+x)^m} \right)$

8. Mostre que $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Sugestão: $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$.

9. Verifique as seguintes desigualdades

$$(a) \ln n \leq n \quad (b) \ln n \leq \sqrt{n} \quad (c) n^2 \leq 2^n \quad (d) \sqrt{n} \leq n$$

10. (a) Escreva o número decimal como uma série infinita;

$$(a) 0,412412412\dots \quad (b) 0,02134343434\dots$$

(b) encontre a soma da série e escreva a soma como o quociente de dois inteiros

11. Justifique as seguintes igualdades:

$$(a) \sum \frac{1}{n(n+1)} = 1, \quad \sum \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1, \quad \sum \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$$

12. Considere a série

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^6} + \dots$$

(a) Mostre que esta série é convergente pelo Critério da Raiz

(b) Podemos chegar a esta conclusão usando o Critério da Razão?