Introdução às Equações Diferenciais
Cáceres, 26 a 31 de julho de 2004

3ª Aula - Dia 28/06/2004

Assuntos a serem cobertos na aula:

1. Teorema de Existência e Unicidade para $y' = f(x, y)$
2. Equações Lineares de 2ª ordem (Capítulo 3, pág. 69)
   (a) Princípio da superposição, soluções linearmente independentes e solução geral (seção 3.2 - pág. 73)
   (b) Teorema de Existência e Unicidade
   (c) Equações homogêneas com coeficientes constantes, raizes reais e distintas (seção 3.1 - pág. 69)
   (d) Determinante Wronskiano, Teorema de Abel (seção 3.3 - pág. 79)

Exercícios

1. (a) Determine a região do plano xy na qual a equação

$$y' = 1 + \sqrt{x - y}$$

   tem existência e unicidade de solução

   (b) Verifique se o gráfico de

$$y_1 = x - (C - \frac{x}{2})^2$$

   está na região de existência e unicidade determinada no item (a)

   (c) Verifique se $y_1(x)$ é solução da equação para todo $x \in \mathbb{R}$? Se não for, qual é o seu intervalo de definição?

   (d) A função $y_2(x) = x$ satisfaz a equação, para todo x, e coincide com $y_1(x)$ para $x = 2C$. Por que isto não contraria o Teorema de Existência e Unicidade?

2. (a) Verifique que $y_1(x) = 1 - x$ e $y_2(x) = -\frac{x^2}{4}$ são ambas soluções do problema de valor inicial $y' = \frac{1}{2}[-x + (x^2 + 4y)^{\frac{1}{2}}]$, $y(2) = -1$. Onde essas soluções são válidas?

   (b) Explique porque a existência de duas soluções com a mesma condição inicial não contraria o teorema de unicidade.

   (c) Resolva a equação diferencial do ítem (a). Sugestão: faça $x^2 + 4y = z^2, z > 0$. Verifique se a sua resposta pode escrita como $y(x) = C(x + C)$. As soluções y_1 e y_2 do ítem (a) estão incluídas nesta expressão?

(d) Faça um gráfico contendo a região de existência e unicidade de solução e os gráficos das soluções.

3. Lista de problemas da página 73 do livro texto.
   1, 2, 5, 9, 10, 17, 20, 21, 22.

4. Lista de problemas da página 78 do livro texto.
   1, 2, 4, 5, 14, 17,

5. Lista de problemas da página 82 do livro texto.
   1, 2, 9, 12, 15, 20, 24, 25.

Exercícios opcionais

1. (a) Verifique se o TEU garante existência e unicidade de solução para o problema de valor inicial $y' = |y|^{1/2}$, $y(0) = 0$.

   (b) Verifique se
   $$y = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-c)^2, & x \geq c \\ 0, & x < c, \end{cases}$$
   onde c é uma constante positiva arbitrária, são soluções do problema de valor inicial acima.

   (c) Qual é o problema de valor inicial que se obtém trocando a variável x por $-x$ no do ítem (a)

2. Seja $f : I\!R \to I\!R$ de classe C^1 e positiva. Se a equação $y' = f(y)$, tem solução que não está definida para todos os valores de x. Por exemplo se $y(x)$, está definida somente no intervalo $(-\infty, b)$, com b finito, pode-se provar que
   $$\lim_{x \to b^-} y(x) = +\infty.$$
   Neste caso, dizemos que a equação tem "blow up" (a solução vai para infinito para x finito), (por exemplo, o PVI $y' = y^2$, $y(1) = 1$, exercício nº 10 da lista 1, tem solução $y = 1/(2-x)$ que está definida em $(-\infty, 2)$).

   Mostre que se f satisfaz a condição
   $$\int_0^\infty \frac{dy}{f(y)} = \infty$$
   então a equação $y' = f(y)$ não tem blow up.

3. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, determine o padrão geral das curvas integrais por uma consideração do campo de direções. Seja $y = \phi(x; y_0)$ a solução correspondente à condição inicial $y(0) = y_0$. Para que valores de y_0 o limite $\lim_{x\to+\infty} \phi(x, y_0)$ é finito? Calcule esse limite nesses casos.

   $a)$ $y' = -y(1+y^2)$ $\quad$ $b)$ $y' = y(1-y^2)$
   $c)$ $y' = (1-y)(2-y)$ $\quad$ $d)$ $y' = \epsilon y - \sigma y^2$, $\sigma > 0$ e $\epsilon > 0$.

4. Consideremos a equação diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas no intervalo (a,b). Se $\{y_1(x), y_2(x)\}$ é um sistema fundamental de soluções e c_1, c_2, c_3 e c_4 são constantes reais, é verdade que $\{c_1y_1(x) + c_2y_2(x), c_3y_1(x) + c_4y_2(x)\}$ também é um sistema fundamental de soluções?

5. Consideremos a equação linear homogênea com coeficientes constantes $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$. Dê uma condição necessária e suficiente envolvendo as raízes características e os números t_1 e t_2 para que o problema de contorno $x(t_1) = m$, $x(t_2) = n$ sempre tenha solução única, quaisquer que sejam m e n.

6. Ache todos os valores reais de λ para os quais o problema de contorno

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \;\; y(1) = 0,$$

tem solução não trivial (isto é, solução não identicamente nula). Ache as respectivas soluções.

7. Mostre que a mudança de variável $v = \frac{\dot{x}}{x}$ transforma a equação

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \tag{1}$$

numa equação de Ricatti

$$\dot{v} + \alpha_1(t)v + \alpha_2(t)v^2 = \alpha_0(t). \tag{2}$$

Reciprocamente, mostre que a mudança de variável $v = \frac{\dot{x}}{\alpha_2 x}$ leva a equação (2) na equação (1). Mostre que toda solução de (1) pode ser escrita na seguinte forma:

$$x(t) = C \exp \int v(t)dt$$

onde $v(t)$ é solução de (2)

8. No cálculo de curvas planas, aprende-se que a curvatura k da curva $y = y(x)$ no ponto (x, y) é dada por:

$$k = \frac{|y''(x)|}{(1 + [y'(x)]^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e que a curvatura de um círculo de raio R é $k = 1/R$. Resolva a equação

$$Ry'' = (1 + [y']^2)^{\frac{3}{2}}$$

para provar que um círculo de raio R centrado em (a, b) é a única curva com curvatura constante igual a R.