Introdução às Equações Diferenciais
Cáceres, 26 a 31 de julho de 2004

$2^{\underline{a}}$ Aula - Dia 27/06/2004

Assuntos a serem cobertos na aula:

1. Mudança de variáveis:
   (a) Equações homogêneas do tipo $y' = f(y/x)$, mudança $z = y/x$ (pág 25 - após o exercícios 29)
   (b) Equação de Bernoulli $y' + p(x)y = f(x)y^n$, mudança $y = z^k$, com $k = 1/(1-n)$ (pág. 40, após o exercício 26)
2. Equações Diferenciais Exatas e Fatores Integrantes $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ (seção 2.6 - pág. 48)

Exercícios

1. Lista de problemas da página 51 do livro texto.
   1 ao 7, 18, 19, 25, 26, 27, 28
2. Resolva as seguintes equações diferenciais (opcional)
   (a) $(3x^2 + 2y^2)dx + (4xy + 6y^2)dy = 0$
   (b) $(cosx + \ln y)dx + (\frac{x}{y} + e^y)dy = 0$
   (c) $2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0$
   (d) $(y \ln y + ye^x)dx + (x + y \cos y)dy = 0$
3. Se
$$\frac{M_y - N_x}{Ny - Mx} = j(z)$$
   for uma função $j(z)$ onde $z = xy$. Mostre que a equação
$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$
   tem um fator integrante
$$\mu(z) = e^{J(z)}$$
   onde J é uma primitiva de j.

   Resolva a equação
$$(3x^2y^4 + x)y' + y = 0$$

4. As equações do tipo
$$y' = f(x, y)$$
onde a função $f(x, y)$ é homogênea, isto é,
$$f(\lambda, \lambda t) = f(1, t),$$
são chamadas de equações homogêneas. O lado direito desta equação pode ser escrito como uma função de y/x, isto é
$$y' = f(x, y) = h(\frac{y}{x})$$
   (a) Demonstre esta última afirmação (se não você não conseguir em 10 minutos, deixe para depois, continue o exercício)
   (b) Verifique que a equação
   $$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2} \tag{1}$$
   é homogênea. Use a mudança de variável do ítem $z = y/x$ para resolver a equação. Mostre que para cada ponto do plano (x_0, y_0) com $y_0 \neq x_0$, existe uma única solução de (1) satisfazendo $y(x_0) = y_0$.
   (c) Resolva as equações
   $$i)\ y' = -\frac{4x + 3y}{2x + y} \qquad ii)\ (x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2dy = 0$$

5. Equações da forma
$$\dot{x} = p(t)x + q(t)x^n, \quad n \neq 0, \ \ n \neq 1$$
são chamadas de Equações de Bernoulli. Como já vimos a mudança da variável x para z, através de
$$x = z^k, \quad k = \frac{1}{1-n}$$
transforma a equação de Bernoulli numa equação linear. Use essa mudança de variável para resolver
   (a) $\dot{x} = \frac{1}{t}x - \frac{1}{t}x^3$
   (b) $y' + \frac{1}{x}y = (\cos x)y^{-2}, \quad y(1) = 1$

Exercícios opcionais

1. Equações na forma
$$y' = \frac{ax + by + k_1}{cx + dy + k_2}$$
podem ser transformadas em equações homogêneas ou em equações separáveis através mudanças de variáveis convenientes. Observe que se as constantes k_1 e k_2 forem iguais a zero essa equação é homogênea do tipo y/x.

(a) Suponha que as retas que formam o numerador e do denominador da equação acima não sejam paralelas, isto é,

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

Faça a mudança de variável

$$\begin{aligned} y &= z + \alpha \\ x &= s + \beta \end{aligned}$$

na equação acima e escolha as constantes α e β de modo a anular os termos constantes que irão aparecer no numerador e no denominador. Essa nova equação nas variáveis z e s é homogênea.

(b) Use esse método para resolver a equação

$$y' = \frac{2x + 2y + 1}{2x + 4y + 3}$$

(c) Quando o determinante acima é zero, podemos transformar a equação em uma equação com variáveis separáveis através da mudança $u = ax + by$. Use essa mudança para resolver

$$y' = \frac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$$

2. A equação

$$\dot{x} = p(t)x + q(t)x^2 + f(t) \tag{2}$$

é conhecida como Equação de Ricatti.

(a) Mostre que se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções da equação (2), então a função $z(t) = x_1(t) - x_2(t)$ é solução da equação de Bernoulli

$$\dot{z} = (p + 2qx_2)z + qz^2$$

(b) Sabendo que $y = x$ é uma solução da equação de Ricatti

$$y' + x^3 y - x^2 y^2 = 1$$

determine as demais soluções

(c) Sabendo que $y = x^2$ é uma solução da equação de Ricatti

$$y' = y^2 + 2x - x^4$$

determine as demais soluções.