Introdução às Equações Diferenciais
Cáceres, 26 a 31 de julho de 2004

Ementa: Métodos elementares de solução de equações diferenciais de 1ª ordem, equações lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes, solução por séries, sistemas lineares, existência e unicidade.

Bibliografia:

Livro texto: Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, William E Boyce, Richard C. di Prima, Editora Guanabara, 7ª edição.

Os seguintes livros complementam o livro texto e contém os tópicos de revisão:

1. Equações Diferenciais Aplicadas, A. F. Neves, D. G. de Figueiredo, Editora IMPA.
2. Equações Diferenciais com Aplicações, R. C. Bassanezi e W. C. Ferreira Jr., Editora Harbra Ltda.
3. Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Contorno, C. H. Edwards Jr. e D. E. Penney, Editora Prentice-Hall do Brasil.
4. Um Curso de Cálculo Vol. 4, H. Guidorizzi, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.
5. Cálculo e Geometria Analítica, Vol. 2, Al Shenk, Editora Campus.
6. O Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 2, 3a. Edição, Leithold, Editora Harbra.
7. Cálculo Avançado, Vol. 2, W. Kaplan, Editora Blucher.
8. Cálculo, Vol.2, Geraldo Ávila, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.

1ª Aula - Dia 26/06/2004

Assuntos a serem cobertos na aula:

1. Equações Diferenciais: definições, equações ordinárias e parciais, exemplos
2. Equações Diferenciais Lineares de 1ª ordem $y' + p(x)y = f(x)$ (seção 2.1 pág. 16)
3. Equações Separáveis $M(x) + N(y)y' = 0$ (seção 2.2 pág. 22)
4. Tópicos de Revisão:

- O Teorema Fundamental do Cálculo
- A função exponencial e o logaritmo natural
- Derivadas, derivadas parciais e diferenciais
- Regra de Cadeia
- O Teorema das Funções Implícitas

Exercícios

1. Lista de problemas da página 21 do livro texto.
   13, 15, 16, 17, 28

2. Lista de problemas da página 25 do livro texto.
   1, 2, 3, 5, 6

3. Verifique em cada caso se a função dada é solução da equação diferencial

   (a) $y'' + 2y' - 3y = 0$; $y_1(x) = e^{-3x}$, $y_2(x) = e^x$.

   (b) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$, $x > 0$; $y_1(x) = x^{-2}$, $y_2(x) = x^{-2}\ln x$.

   (c) $y' - 2xy = 1$; $y(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt + e^{x^2}$.

4. Determine para que valores de r as equações lineares que se seguem têm soluções do tipo $y(x) = e^{rx}$

   $$a)\ \ y'' + y' - 6y = 0 \quad b)\ \ y''' - 3y'' + 2y' = 0$$

5. Determine para que valores de r as equações lineares que se seguem têm soluções do tipo $y(x) = x^r$ para $x > 0$

   $$a)\ \ x^2y'' + 4xy' + 2y = 0 \quad b)\ \ x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$$

6. (a) Calcule a derivada de

   $$x(t) = e^{t^2}\int_0^t e^{-s^2}ds$$

   Sug.: Use o Teorema Fundamental do Cálculo para calcular a derivada de $x(t)$

   (b) determine uma equação diferencial linear, e a condição inicial, que $x(t)$ satisfaz

7. Mostre que

   $$y(x) = y_0e^{ax} + \int_0^x e^{a(x-s)}f(s)ds$$

   é a solução do problema de valor inicial

   $$\begin{cases} y' = ay + f(x) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

8. Determine a solução do problema $y' = y^2$, $y(1) = 1$. Qual é o intervalo de definição desta solução? Existe alguma solução desta equação definida para todo x real?

9. Mostre que $y = (1-x^2)^{-1}$ é uma solução do problema de valor inicial $y' = 2xy^2$, $y(0) = 1$. Em que intervalo esta solução é válida? A equação diferencial deixa de ser válida em algum lugar?

Exercícios opcionais

1. Resolva as seguintes equações diferenciais

$$\begin{array}{ll} a)\ y' = 2xy + x,\ \ y(0) = 1 & b)\ y' + 3y = x + e^{-2x} \\ c)\ y' = (1+x)(1+y) & d)\ y' = \frac{2x}{y+x^2y},\ y(0) = -2 \\ e)\ y' - y = 2xe^{2x}, y(0) = 1 & f)\ y' + y = \frac{1}{1+x^2}, y(0) = 0 \end{array}$$

2. Verifique, para cada uma das equações diferenciais parciais que se seguem, se a função dada é uma solução

   (a) $u_{xx} + u_{yy} = 0$; (equação de Laplace)
   $u_1(x,y) = \cos x \cosh y$, $\quad u_2(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

   (b) $u_t = a^2 u_{xx}$; (equação do calor)
   $u_1(x,t) = e^{-a^2 t} \sin x$, $\quad u_2(x,t) = e^{-a^2\lambda^2 t} \sin \lambda x$, λ constante real.

   (c) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$; (equação da onda)
   $u_1(x,t) = \sin \lambda x \sin \lambda a t$, $\quad u_2(x,t) = \sin(x - at)$, λ uma constante real.