MA-351 6^a LISTA DE EXERCÍCIOS

Assunto: Sistemas Lineares de Equações Diferenciais

1. Encontre a solução dos seguinte sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} x, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. (a) Determine a matriz principal do sistema

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x$$

   (b) Determine a solução do sistema acima que satisfaz a condição inicial

$$x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   (c) Determine a solução do Problema de Valor Inicial

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. Sejam $h_1(t)$ e $h_2(t)$ funções contínuas e periódicas de período 2π. Dê uma condição, necessária e suficiente, para que todas as soluções do sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \ \ y + h_1(t) \\ \dot{y} = -x + h_2(t) \end{cases}$$

sejam periódicas de período 2π?
Sugestão: Justifique e use o seguinte resultado: Se h é contínua e periódica de período 2π, então $H(t) = \int_0^t h(s)ds$ é periódica de período 2π se, e somente se $\int_0^{2\pi} h(s)ds = 0$.

4. Seja A uma matriz $n \times n$, e $x(t),\ y(t) \in I\!R^n$, mostre que:

   (a)

$$\frac{d}{dt}\langle x(t), y(t)\rangle = \langle \dot{x}(t), y(t)\rangle + \langle x(t), \dot{y}(t)\rangle.$$

   (b)

$$\langle Ax(t), y(t)\rangle = \langle x(t), A^t y(t)\rangle,$$

   onde $\langle\ ,\ \rangle$ denota o produto interno usual do $I\!R^n$, e A^t denota a matriz transposta de A.

   (c) Se A é uma matriz anti-simétrica (isto é $A^t = -A$), então mostre que as soluções $x(t)$ do sistema diferencial $\dot{x} = Ax$, permanece em superfícies esféricas centradas na origem. Sugestão: calcule a derivada de $\|x(t)\|^2$.