

## MA-351 4ª LISTA DE EXERCÍCIOS

Assunto: Sequências e Séries

1. Verifique se convergem ou não

$$\begin{array}{ll} a) \frac{n^2+1}{n^3+1} & b) \frac{\ln n}{n} \\ c) n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) & d) \frac{n}{n+1} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ e) \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n & f) \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \end{array}$$

2. Use a definição de limite para provar que

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3}$$

3. Considere a sequência  $a_n = \int_1^n \frac{1}{x^p} dx$

- (a) Mostre que  $(a_n)$  não é limitada de  $p \leq 1$
- (b) Mostre que  $a_n \rightarrow \frac{1}{p-1}$  se  $p > 1$ .

4. Mostre que

- (a)  $\lim a_n = a \Rightarrow \lim |a_n| = |a|$
- (b)  $\lim a_n = 0 \Leftrightarrow \lim |a_n| = 0$
- (c)  $\lim a_n = a$  e  $\lim(a_n - b_n) = 0 \Rightarrow \lim |b_n| = |a|$
- (d) Se  $k \in \mathbb{N}$  e  $1 \leq a_n \leq n^k$ , então  $\lim \sqrt[k]{a_n} = 1$

5. Seja a sequência definida por  $x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} = 1 + \sqrt{x_n}$ . Mostre que  $x_n$  é convergente e calcule seu limite.

Sugestão: mostre por indução que  $x_n$  é monotônica e limitada.

6. Seja a sequência definida por  $x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} = 9 - 2x_n$ . Verifique se  $x_n$  é convergente e, em caso afirmativo, calcule seu limite.

7. Mostre que  $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ . Sugestão:  $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$ .

8. Verifique as seguintes desigualdades

$$(a) \ln n \leq n \quad (b) \ln n \leq \sqrt{n} \quad (c) n^2 \leq 2^n \quad (d) \sqrt{n} \leq n$$

9. Estude a convergência das séries seguintes:

$$\begin{array}{ll} a) \sum (-1)^n \left(\frac{n^2+2}{n^3}\right) & b) \sum (\sqrt{n^2+1} - n) \\ c) \sum \frac{1}{n \log^2 n} & d) \sum \frac{2^n+1}{3^n+n} \\ e) \sum \left(\frac{n+5}{2n+\cos n}\right)^n & f) \sum \frac{1}{(\ln n)^n} \end{array}$$

10. Escreva a fração decimal como:

- (a) uma série infinita;
- (b) encontre a soma da série e escreva a soma como o quociente de dois inteiros

$$(a) 0,412412412\dots \quad (b) 0,02134343434\dots$$

11. Justifique as seguintes igualdades:

$$(a) \sum \frac{1}{n(n+1)} = 1, \quad \sum \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1, \quad \sum \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$$

12. Considere a série

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^6} + \dots$$

- (a) Mostre que esta série é convergente pelo Critério da Raiz
  - (b) Podemos chegar a esta conclusão usando o Critério da Razão?
  - (c) O Critério da Raiz é mais eficiente que o Critério da Razão?
13. (Exercício desafio) Se  $a_n > 0$  e  $\sum a_n$  é divergente, mostre que  $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$  é divergente.