MA-351 3^a LISTA DE EXERCÍCIOS

Assunto: Equações Diferenciais Lineares de 2ª ordem

1. Resolva as seguintes equações diferenciais

   (a) $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$

   (b) $y'' + 8y' - 9y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$

   (c) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

   (d) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

   (e) $4y'' + 4y' + y = 3xe^x$

   (f) $\ddot{x} + x = \sec t$

   (g) $y^{(3)} - y'' - 12y' = x - 2xe^{-3x}$

   (h) $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$

2. Se p e q são constantes positivas e $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, mostre que para quaisquer soluções $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ de

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f(t)$$

   tem-se

$$\lim_{t\to\infty}[\phi_1(t) - \phi_2(t)] = 0$$

3. Consideremos a equação diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas no intervalo (a,b). Discuta se é válido ou não o seguinte teorema de existência e unicidade: "se $x_0 \in (a, b)$ e c e d são números reais dados, então existe uma e uma só solução da equação acima que satisfaz $y'(x_0) = c$ e $y''(x_0) = d$". Justifique sua resposta, isto é, prove ou dê contra-exemplo.

4. Dado que $y_1 = x$ é solução de $x^2y'' - x(x + 2)y' + (x + 2)y = 0$, encontre uma segunda solução L.I. Calcule o Wronskiano dessas soluções. Comente o fato dele se anular em $x = 0$.

5. Sabendo que y_1 é solução da EDO encontre uma segunda solução L.I.

   (a) $4x^2y'' + y = 0$; $y_1 = \sqrt{x}$

   (b) $xy'' - 2(x + 1)y' + 4y = 0$; $y_1 = e^{2x}$

6. Existe uma equação linear de segunda ordem com coeficientes constantes reais cuja solução geral seja da forma $c_1 \exp 2t + c_2 \exp 3t \cos 2t$?

7. Consideremos a equação diferencial $y'' + \cos x\, y' + xy = 0$ e sejam y_1 e y_2 as soluções que satisfazem ãs condições $y_1'(0) = 1$, $y_1(0) = 2$, $y_2'(0) = 3$ e $y_2(0) = 4$. Definamos a função $v(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$. Calcule $v(\pi/2)$.

8. Consideremos a equação diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas no intervalo (a,b). Se $\{y_1(x), y_2(x)\}$ é um sistema fundamental de soluções e c_1, c_2, c_3 e c_4 são constantes reais, é verdade que $\{c_1y_1(x) + c_2y_2(x), c_3y_1(x) + c_4y_2(x)\}$ também é um sistema fundamental de soluções ?

9. Consideremos a equação linear homogênea com coeficientes constantes $\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$. Dê uma condição necessária e suficiente envolvendo as raízes características e os números t_1 e t_2 para que o problema de contorno $x(t_1) = m$, $x(t_2) = n$ sempre tenha solução única, quaisquer que sejam m e n.

10. Ache todos os valores reais de λ para os quais o problema de contorno
$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \; y(1) = 0,$$
tem solução não trivial (isto é, solução não identicamente nula). Ache as respectivas soluções.

11. Mostre que a mudança de variável $v = \frac{\dot{x}}{x}$ transforma a equação
$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0 \tag{1}$$
numa equação de Ricatti
$$\dot{v} + \alpha_1(t)v + \alpha_2(t)v^2 = \alpha_0(t). \tag{2}$$
Reciprocamente, mostre que a mudança de variável $v = \frac{\dot{x}}{\alpha_2 x}$ leva a equação (2) na equação (1). Mostre que toda solução de (1) pode ser escrita na seguinte forma:
$$x(t) = C \exp \int v(t)dt$$
onde $v(t)$ é solução de (2)

12. No cálculo de curvas planas, aprende-se que a curvatura k da curva $y = y(x)$ no ponto (x, y) é dada por:
$$k = \frac{|y''(x)|}{(1 + [y'(x)]^2)^{\frac{3}{2}}}$$
e que a curvatura de um círculo de raio R é $k = 1/R$. Resolva a equação
$$Ry'' = (1 + [y']^2)^{\frac{3}{2}}$$
para provar que um círculo de raio R centrado em (a, b) é a única curva com curvatura constante igual a R.