MA-351 2^a **LISTA DE EXERCÍCIOS**

Assunto: Equações de 1ª ordem, equações exatas, fatores integrantes, mudanças de variáveis, equação de Bernoulli e de Ricatti

1. Resolva as seguintes equações diferenciais

   (a) $(3x^2 + 2y^2)dx + (4xy + 6y^2)dy = 0$

   (b) $(cosx + \ln y)dx + (\frac{x}{y} + e^y)dy = 0$

   (c) $2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0$

   (d) $(y \ln y + ye^x)dx + (x + y \cos y)dy = 0$

2. Se
$$\frac{M_y - N_x}{Ny - Mx} = j(z)$$
for uma função $j(z)$ onde $z = xy$. Mostre que a equação
$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$
tem um fator integrante
$$\mu(z) = e^{J(z)}$$
onde J é uma primitiva de j.

   Resolva a equação
$$(3x^2y^4 + x)y' + y = 0$$

3. As equações do tipo
$$y' = f(x, y)$$
onde a função $f(x, y)$ é homogênea, isto é,
$$f(\lambda, \lambda t) = f(1, t),$$
são chamadas de equações homogêneas. O lado direito desta equação pode ser escrito como função de y/x
$$y' = f(x, y) = h(\frac{y}{x})$$

   (a) Demonstre esta última afirmação e em seguida mostre que mudança de variável y por z onde
$$z = \frac{y}{x}$$
transforma a equação homogênea em uma equação de variáveis separáveis.

(b) Verifique que a equação
$$y' = \frac{xy}{x^2 - y^2} \tag{1}$$
é homogênea. Use a mudança de variável do ítem (a) para resolver a equação. Mostre que para cada ponto do plano (x_0, y_0) com $y_0 \neq x_0$, existe uma única solução de (1) satisfazendo $y(x_0) = y_0$.

(c) Resolva as equações
$$i)\ y' = -\frac{4x + 3y}{2x + y} \qquad ii)\ (x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2 dy = 0$$

4. Equações na forma
$$y' = \frac{ax + by + k_1}{cx + dy + k_2}$$
podem ser transformadas em equações homogêneas ou em equações separáveis através mudanças de variáveis.

(a) Suponha que as retas do numerador e do denominador não sejam paralelas, isto é,
$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$$
Observe que se as constantes k_1 e k_2 fossem iguais a zero essa equação seria homogênea.
Faça a mudança de variável
$$\begin{aligned} y &= z + \alpha \\ x &= s + \beta \end{aligned}$$
e escolha as constantes α e β de modo que a nova equação nas variáveis z e s seja homogênea.

(b) Use esse método para resolver a equação
$$y' = \frac{2x + 2y + 1}{2x + 4y + 3}$$

(c) Quando o determinante acima é zero, podemos transformar a equação em uma equação com variáveis separáveis através da mudança $u = ax + by$. Use essa mudança para resolver
$$y' = \frac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$$

5. Equações da forma
$$\dot{x} = p(t)x + q(t)x^n, \quad n \neq 0, \ \ n \neq 1$$

são chamadas de Equações de Bernoulli. Mostre que a mudança da variável x por z

$$x = z^k, \quad k = \frac{1}{1-n}$$

transforma a equação de Bernoulli numa equação linear. Use essa mudança de variável para resolver

(a) $\dot{x} = \frac{1}{t}x - \frac{1}{t}x^3$

(b) $y' + \frac{1}{x}y = (\cos x)y^{-2}, \quad y(1) = 1$

6. A equação

$$\dot{x} = p(t)x + q(t)x^2 + f(t) \tag{2}$$

é conhecida como Equação de Ricatti.

(a) Mostre que se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções da equação (2), então a função $z(t) = x_1(t) - x_2(t)$ é solução da equação de Bernoulli

$$\dot{z} = (p + 2qx_2)z + qz^2$$

(b) Sabendo que $y = x$ é uma solução da equação de Ricatti

$$y' + x^3y - x^2y^2 = 1$$

determine as demais soluções

(c) Sabendo que $y = x^2$ é uma solução da equação de Ricatti

$$y' = y^2 + 2x - x^4$$

determine as demais soluções.