MA-351 1^a LISTA DE EXERCÍCIOS

Assunto: Exemplos de Equações Diferenciais, verificação de solução, Equações Diferenciais de 1ª ordem lineares e separáveis e Teorema de Existência e Unicidade.

1. Resolva as seguintes equações diferenciais

$$\begin{array}{ll} a)\ y' = 2xy + x,\ \ y(0) = 1 & b)\ y' + 3y = x + e^{-2x} \\ c)\ y' = (1+x)(1+y) & d)\ y' = \frac{2x}{y + x^2 y},\ y(0) = -2 \\ e)\ y' - y = 2xe^{2x}, y(0) = 1 & f)\ y' + y = \frac{1}{1+x^2}, y(0) = 0 \end{array}$$

2. Verifique em cada caso se a função dada é solução da equação diferencial

   (a) $y'' + 2y' - 3y = 0$; $y_1(x) = e^{-3x}$, $y_2(x) = e^x$.

   (b) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$, $x > 0$; $y_1(x) = x^{-2}$, $y_2(x) = x^{-2}\ln x$.

   (c) $y' - 2xy = 1$; $y(x) = e^{x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt + e^{x^2}$.

3. Determine para que valores de r as equações lineares que se seguem têm soluções do tipo $y(x) = e^{rx}$

$$a)\ y'' + y' - 6y = 0 \quad b)\ y''' - 3y'' + 2y' = 0$$

4. Determine para que valores de r as equações lineares que se seguem têm soluções do tipo $y(x) = x^r$ para $x > 0$

$$a)\ x^2y'' + 4xy' + 2y = 0 \quad b)\ x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$$

5. Verifique, para cada uma das equações diferenciais parciais que se seguem, se a função dada é uma solução

   (a) $u_{xx} + u_{yy} = 0$; $\quad u_1(x,y) = \cos x \cosh y$, $\quad u_2(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

   (b) $u_t = a^2u_{xx}$; $\quad u_1(x,t) = e^{-a^2t}\sin x$, $\quad u_2(x,t) = e^{-a^2\lambda^2 t}\sin\lambda x$, λ constante real.

   (c) $u_{tt} = a^2u_{xx}$; $\quad u_1(x,t) = \sin\lambda x \sin\lambda at$, $\quad u_2(x,t) = \sin(x - at)$, λ uma constante real.

6. Verifique, para cada uma das equações diferenciais parciais que se seguem, se a função dada é uma solução

   (a) $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$; $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$, $(x,y,z) \neq (0,0,0)$

(b) $u_t = a^2 u_{xx}; \quad u = (\frac{\pi}{t})^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$, $t > 0$

(c) $u_{tt} = a^2 u_{xx}; \quad u = f(x - at) + g(x + at)$, onde f e g são funções duas vêzes deriváveis.

7. (a) Calcule a derivada de

$$x(t) = e^{t^2} \int_0^t e^{-s^2} ds$$

(b) determine uma equação diferencial linear, e a condição inicial, que $x(t)$ satisfaz

8. (a) Mostre que $y = (1 - x^2)^{-1}$ é uma solução do problema de valor inicial $y' = 2xy^2$, $y(0) = 1$. Em que intervalo esta solução é válida? A equação diferencial deixa de ser válida em algum lugar?

(b) Mostre que $y = [2(x + c)]^{-\frac{1}{2}}$, onde c é uma constante arbitrária, satisfaz à equação diferencial $y' + y^3 = 0$.
Ache a solução que satisfaça à condição inicial $y(1) = 2$. Onde esta solução é válida? Note que $y = 0$ é também solução da equação diferencial, mas que esta solução não pode ser obtida atribuindo-se um valor para c na fórmula acima.

9. (a) Determine a região do plano xy na qual a equação

$$y' = 1 + \sqrt{x - y}$$

tem existência e unicidade de solução

(b) Verifique se o gráfico de

$$y_1 = x - (C - \frac{x}{2})^2$$

está na região de existência e unicidade determinada no item (a)

(c) Verifique se $y_1(x)$ é solução da equação para todo $x \in \mathbb{R}$? Se não for, qual é o seu intervalo de definição?

(d) A função $y_2(x) = x$ satisfaz a equação, para todo x, e coincide com $y_1(x)$ para $x = 2C$. Por que isto não contraria o Teorema de Existência e Unicidade?

10. (a) Verifique que $y_1(x) = 1 - x$ e $y_2(x) = -\frac{x^2}{4}$ são ambas soluções do problema de valor inicial $y' = \frac{1}{2}[-x + (x^2 + 4y)^{\frac{1}{2}}]$, $y(2) = -1$. Onde essas soluções são válidas?

(b) Explique porque a existência de duas soluções com a mesma condição inicial não contraria o teorema de unicidade.

(c) Resolva a equação diferencial do ítem (a). Sugestão: faça $x^2 + 4y = z^2, z > 0$. Verifique se a sua resposta pode escrita como $y(x) = C(x+C)$. As soluções y_1 e y_2 do ítem (a) estão incluídas nesta expressão?

(d) Faça um gráfico contendo a região de existência e unicidade de solução e os gráficos das soluções.

11. (a) Verifique se o TEU garante existência e unicidade de solução para o problema de valor inicial $y' = |y|^{1/2}$, $y(0) = 0$.

 (b) Verifique se

$$y = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-c)^2, & x \geq c \\ 0, & x < c, \end{cases}$$

 onde c é uma constante positiva arbitrária, são soluções do problema de valor inicial acima.

 (c) Qual é o problema de valor inicial que se obtém trocando a variável x por $-x$ no do ítem (a)

12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e positiva. Se a equação $y' = f(y)$, tem solução que não está definida para todos os valores de x. Por exemplo se $y(x)$, está definida somente no intervalo $(-\infty, b)$, com b finito, então devemos ter

$$\lim_{x \to b^-} y(x) = +\infty.$$

Neste caso, dizemos que a equação tem "blow up" (a solução vai para infinito para x finito). Por exemplo o PVI $y' = y^2$, $y(1) = 1$ tem solução $y = 1/(2-x)$ que está definida em $(-\infty, 2)$.

Mostre que se

$$\int_0^\infty \frac{dy}{f(y)} = \infty$$

então a equação $y' = f(y)$ não tem blow up.

13. Para cada uma das seguintes equações diferenciais, determine o padrão geral das curvas integrais por uma consideração do campo de direções. Seja $y = \phi(x; y_0)$ a solução correspondente à condição inicial $y(0) = y_0$. Para que valores de y_0 o limite $\lim_{x\to+\infty} \phi(x, y_0)$ é finito? Calcule esse limite nesses casos.

$a)\ y' = -y(1+y^2) \qquad b)\ y' = y(1-y^2)$

$c)\ y' = (1-y)(2-y) \quad d)\ y' = \epsilon y - \sigma y^2,\ \sigma > 0 \text{ e } \epsilon > 0.$