

Introdução

Exemplos

Função de Distribuição  
Acumulada

Medidas de Posição

Medidas de Dispersão

## Tópico: Variáveis Aleatórias

# Variáveis Aleatórias Discretas

- ▶ Variável que assume valores em um conjunto enumerável  
 $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$
- ▶ Exemplo: Número de filhos - Com dados do último censo, a assistente social de um censo de saúde constatou que para as famílias da região:
  - ▶ 20% não têm filhos
  - ▶ 30% têm 1 filho
  - ▶ 35% têm 2 filhos
  - ▶ 15% têm igualmente 3, 4 ou 5 filhos

# Variáveis Aleatórias Discretas

- ▶ Interesse: Estudo da variável  $N =$  número de filhos
- ▶ Suponha que uma família será selecionada aleatoriamente nessa região e o número de filhos averiguado, qual seria o comportamento esperado dessa família em relação a  $N$  ?
- ▶  $N$  pode assumir os valores em  $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 
  - ▶  $P(N = 0) = 0.2$
  - ▶  $P(N = 1) = 0.3$
  - ▶  $P(N = 2) = 0.35$
  - ▶  $P(N = 3) = P(N = 4) = P(N = 5) = \frac{0.15}{3} = 0.05$

# Variáveis Aleatórias Discretas

- ▶ Finalmente, determinamos uma "função de probabilidades" para  $N$ :

$N$	0	1	2	3	4	5
$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$
$p_i$	0.20	0.30	0.35	0.05	0.05	0.05

- ▶ Tal que  $\sum_{i=1}^6 p_i = 1$

# Função Discreta de Probabilidade

- ▶ Função que atribui a cada valor da variável discreta  $X$  sua probabilidade
- ▶  $P(X = x_i) = p_i$ , em que  $X$  assume os valores em  $\Omega = \{x_1, x_2, \dots\}$
- ▶  $0 \leq p_i \leq 1$
- ▶  $\sum_i p_i = 1$

$X$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$
$p_i$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\dots$

# Exemplos

- ▶ Na construção de um certo prédio, as fundações devem atingir 15 metros de profundidade, e para cada 5 metros de estacas colocadas, o operador anota se houve alteração no ritmo de perfuração previamente estabelecido. Essa alteração é resultado de mudanças para mais ou para menos, na resistência do subsolo. Nos dois casos, medidas corretivas serão necessárias, encarecendo o custo da obra.
  - ▶ com base em avaliações geológicas, admite-se que a probabilidade de ocorrência de alterações é de 0.1 para cada 5 metros
  - ▶ o custo básico inicial é de 100 UPCs (Unidades Padrão de Construção) e será acrescido de  $50k$ , com  $k$  representando o número de alterações observadas

# Exemplos

- ▶ Como se comporta a variável Custo de Obra de fundações?
- ▶ Assumimos que as alterações ocorrem independentemente entre cada um dos três intervalos de 5 metros
- ▶  $A$  = ocorrência de alterações em cada intervalo
- ▶ 3 etapas  $\Rightarrow 2^3 = 8$  possibilidades

# Exemplos

Evento	Probabilidade	Custo
AAA	$(0.1)^3 = 0.001$	250
AAAC	$(0.1)^2(0.9) = 0.009$	200
AA <sup>C</sup> A	$(0.1)^2(0.9) = 0.009$	200
AA <sup>C</sup> AC	$(0.1)(0.9)^2 = 0.081$	150
A <sup>C</sup> AA	$(0.1)^2(0.9) = 0.009$	200
A <sup>C</sup> AA <sup>C</sup>	$(0.1)(0.9)^2 = 0.081$	150
A <sup>C</sup> A <sup>C</sup> A	$(0.1)(0.9)^2 = 0.081$	150
A <sup>C</sup> A <sup>C</sup> AC	$(0.9)^3 = 0.729$	100



# Exemplos

- ▶ Note que associamos a cada evento do espaço amostral um valor da variável  $C$  (custo), e eventos diferentes podem corresponder ao mesmo valor de  $C$ .
- ▶  $c_1 = 100$ ,  $c_2 = 150$ ,  $c_3 = 200$ ,  $c_4 = 250$ 
  - ▶  $P(C = c_1) = P(A^C A^C A^C) = 0.729$
  - ▶  $P(C = c_2) = P(AA^C A^C \cup A^C AA^C \cup A^C A^C A) = 3 \times 0.081 = 0.243$
  - ▶  $P(C = c_3) = P(AAA^C \cup AA^C A \cup A^C AA) = 3 \times 0.009 = 0.027$
  - ▶  $P(C = c_4) = P(AAA) = 0.001$

# Exemplos

C	100	150	200	250
$p_i$	0.729	0.243	0.027	0.001

- ▶ O comportamento de  $C$ , estudado através da probabilidade de ocorrência, pode auxiliar na previsão de gastos e na elaboração de orçamentos

# Exemplos

- ▶ Uma moeda é lançada duas vezes
- ▶  $N$  = número de caras em dois lançamentos
- ▶  $\Omega = \{CC, CX, XC, XX\}$ , em que C = cara e X =coroa

N	0	1	2
$p_i$	$P(XX) = \frac{1}{4}$	$P(CX \cup XC) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	$P(CC) = \frac{1}{4}$

# Função de Distribuição Acumulada

- ▶ Um grupo de 1000 crianças foi analisado para determinar a efetividade de uma vacina contra um tipo de alergia. As crianças recebiam uma dose de vacina e após um mês passavam por um novo teste. Caso ainda tivessem tido alguma reação alérgica, recebiam outra dose. Ao fim de 5 doses, foram consideradas imunizadas.
- ▶ Variável de interesse:  $X$  = número de doses

Doses ( $X$ )	1	2	3	4	5
Freq.	245	288	256	145	66

# Função de Distribuição Acumulada

- ▶ Uma criança é sorteada ao acaso, qual será a probabilidade dela ter recebido 2 doses?

$$P(X = 2) = \frac{288}{1000} = 0.288$$

Doses (X)	1	2	3	4	5
$p_i$	0.245	0.288	0.256	0.145	0.066

- ▶ Qual a probabilidade da criança ter recebido até duas doses?

$$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0.245 + 0.288 = 0.533$$

# Função de Distribuição Acumulada

► Em geral, a função de distribuição acumulada (f.d.a.) de uma variável discreta  $X$  é definida por  $F(x) = P(X \leq x)$

► Assim, se  $X$  assume os valores em  $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ :

$$F(x_1) = P(X = x_1)$$

$$F(x_2) = P(X = x_1) + P(X = x_2)$$

⋮

$$F(x_n) = P(X = x_1) + \dots + P(X = x_n)$$

# Função de Distribuição Acumulada

- Retomando o exemplo das vacinas, notemos que a f.d.a. de  $X =$  número de doses é definido para qualquer valor real  $x$ , logo:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.245, & 1 \leq x < 2 \\ 0.533, & 2 \leq x < 3 \\ 0.789, & 3 \leq x < 4 \\ 0.934, & 4 \leq x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$

# Função de Distribuição Acumulada

Profa. V.A.  
González-López,  
IMECC/UNICAMP

Introdução

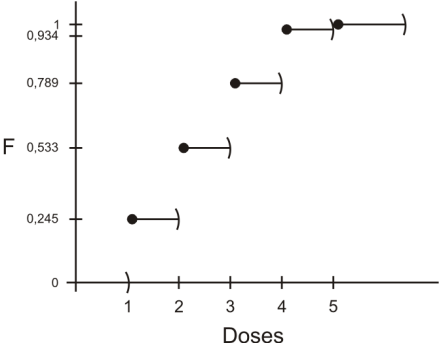
Exemplos

Função de Distribuição  
Acumulada

Medidas de Posição

Medidas de Dispersão

► f.d.a. de  $X =$  número de doses:





# Medidas de Posição para Variáveis Aleatórias

## Discretas

- ▶ A média, valor esperado ou esperança de uma variável aleatória discreta  $X$ , cuja f.d.p. é dada por  $P(X = x_i) = p_i$  é dada pela expressão:

$$\mu_X = E(X) = \sum_{i \geq 1} x_i p_i$$

- ▶ A mediana ( $Md$ ) é o valor médio que satisfaz

$$P(X \geq Md) \geq \frac{1}{2} \text{ e } P(X \leq Md) \geq \frac{1}{2}$$

- ▶ A moda ( $Mo$ ) é o valor da variável  $X$  que tem maior probabilidade de ocorrência:

$$P(X = Mo) = \max\{p_1, p_2, \dots\}$$

# Medidas de Posição para Variáveis Aleatórias

## Discretas

▶ Exemplo:

$X$	-5	10	15	20
$p_i$	0.3	0.2	0.4	0.1

▶  $\mu_X = (-5) \times 0.3 + 10 \times 0.2 + 15 \times 0.4 + 20 \times 0.1 = 8.5$

▶  $Mo(X) = 15$

▶  $P(X \leq 10) = P(X \geq 15) = 0.5$ , então a mediana

$$Md(X) = \frac{10+15}{2} = 12.5$$

- ▶ Obs: note que nem a média (8.5) nem a mediana (12.5) são valores assumidos pela variáveis  $X$ .

# Medidas de Posição para Variáveis Aleatórias Discretas

- ▶ Propriedade relevante das medidas de posição. Exemplo:

$X$	2	5	8	15	20
$p_i$	0.1	0.3	0.2	0.2	0.2

- ▶  $\mu_X = 10.3$
- ▶  $Mo(X) = 5$
- ▶  $Md(X) = 8$

# Medidas de Posição para Variáveis Aleatórias

## Discretas

- ▶ Exemplo: Seja  $Y = 5X - 10$

Y	0	15	30	65	90
$p_i$	0.1	0.3	0.2	0.2	0.2

- ▶  $\mu_Y = 41.5$
- ▶  $Mo(Y) = 15$
- ▶  $Md(Y) = 30$
- ▶ Note que, como  $Y = 5X - 10$ :

$$\mu_Y = 5\mu_X - 10$$

$$Mo(Y) = 5Mo(X) - 10$$

$$Md(Y) = 5Md(X) - 10$$

# Medidas de Dispersão para Variáveis Aleatórias Discretas

- ▶ Seja uma variável aleatória discreta  $X$ , cuja f.d.p. é dada por  $P(X = x_i) = p_i$  e média  $\mu_X$ , a variância é a ponderação pelas respectivas probabilidades, dos desvios relativos à média elevados ao quadrado:

$$\sigma_X^2 = \text{Var}(X) = \sum_{i \geq 1} (x_i - \mu_X)^2 p_i$$

- ▶ Extraíndo a raiz quadrada da variância, obtemos o desvio padrão, representado por  $\sigma_X$

# Medidas de Dispersão para Variáveis Aleatórias Discretas

▶ Exemplo:

X	2	5	8	15	20
$p_i$	0.1	0.3	0.2	0.2	0.2

- ▶  $\mu_X = 10.3$
- ▶  $\sigma_X^2 = 39.61$
- ▶  $\sigma_X = 6.294$