

Estimadores de Máxima Verossimilhança

- Objetivo: estimar p de Bernoulli

$$f_{X_i}(x_i) = p^{x_i}(1-p)^{1-x_i}; \quad X_i = \begin{cases} 1, & P(X_i = 1) = p \\ 0, & P(X_i = 0) = 1-p \end{cases}$$

$$X_i \sim \text{Bern}(p); \quad i = 1, \dots, n$$

Estimadores de Máxima Verossimilhança

- Vamos considerar X_1, \dots, X_n independentes
- definimos a função de verossimilhança $L(p)$

$$\begin{aligned}L(p) &= f_{X_1}(x_1) \times \dots \times f_{X_n}(x_n) \\ &= p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\end{aligned}$$

$$\ln(L(p)) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \ln(p) + \left(n + \sum_{i=1}^n x_i \right) \ln(1-p)$$

Estimadores de Máxima Verossimilhança

- Propósito: determinar o máximo valor de $L(p)$ ou, equivalentemente, de $\ln(L(p))$

$$\frac{\partial}{\partial p} \ln(L(p)) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} - \frac{(n - \sum_{i=1}^n x_i)}{1-p} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} = \frac{(n - \sum_{i=1}^n x_i)}{1-p}$$

$$\Rightarrow \hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ é o estimador de máxima verossimilhança de } p$$

Estimadores de Máxima Verossimilhança

■ Exemplo

- $n = 4$
- $(X_1, X_2, X_3, X_4) = (1, 0, 0, 1)$
- $\hat{p} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$

Estimadores de Máxima Verossimilhança

- Seja a distribuição: $f_X(x) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x)$; $\theta > 0$
- Objetivo: estimar θ usando uma amostra X_1, \dots, X_n de valores da distribuição $f_X(\cdot)$

$$\begin{aligned}L(\theta) &= \theta x_1^{\theta-1} \dots \theta x_n^{\theta-1} \\ &= \theta^n (x_1 \dots x_n)^{\theta-1}\end{aligned}$$

$$\ln(L(\theta)) = n \ln(\theta) + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$$

Estimadores de Máxima Verossimilhança

- Propósito: determinar o valor máximo de $L(\theta)$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln(L(\theta)) = \frac{n}{\theta} + \ln \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{n}{\theta} = -\ln \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{-n}{\ln \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)} \text{ é o estimador de máxima verossimilhança de } \theta$$

Estimadores de Máxima Verossimilhança

■ Exemplo

- $n = 5$

- $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = (0.1, 0.9, 0.5, 0.4, 0.1)$

- $\hat{\theta} = 0.7911$