

Tópico: Testes de Hipóteses

Teste de Hipótese

- **Motivação:** Um medicamento que existe na indústria farmacêutica produz o efeito desejado em 60% dos casos em que é aplicado. Com o objetivo de incrementar essa porcentagem, o laboratório lança um novo medicamento elaborado com técnicas avançadas e afirma: "O novo medicamento é melhor que o já existente"

Teste de Hipótese

- Se o novo medicamento produz o efeito desejado em 90% dos casos (em uma amostra) nos quais foi utilizado:
 - a afirmação do laboratório tem fundamento?
 - para decidir se a afirmação tem fundamento, baseamos nosso estudo na informação contida numa amostra aleatória de usuários do produto.
 - vamos supor que o medicamento novo não pode ser pior que o já existente.

Teste de Hipótese

- Decisão: Estratégia de Decisão
 - Seja θ o parâmetro ou a quantidade de interesse, θ permite fazer alguma inferência relativa ao problema
 - $\theta \in \omega$ (espaço paramétrico)
 - Suponha que $\omega \doteq \omega_1 \cup \omega_2$ (união disjunta)
 - Teste: $H_0 : \theta \in \omega_1$ vs $H_1 : \theta \in \omega_2$

Teste de Hipótese

- Convenção:
 - H_0 : hipótese nula; a afirmação referida ao possível valor de θ , contra a qual procuramos evidência.
 - H_1 : hipótese alternativa; a afirmação referida ao possível valor de θ , que intuímos seja verdadeira.

Teste de Hipótese

- No exemplo de motivação: $H_0 : \theta = 0.6$ vs $H_1 : \theta = 0.9$
- Definimos o conjunto de decisões $A = \{a : a = a_1 \text{ ou } a = a_2\}$:
 - $a_1 =$ aceitar H_0 (e rejeitar H_1)
 - $a_2 =$ rejeitar H_0 (e aceitar H_1)
 - a ($= a_1$ ou $= a_2$) será a decisão tomada a partir da observação da amostra.

Regra de Decisão

- A amostra $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ pertence ao espaço amostral S
- S pode ser colocado como $S = S_1 \cup S_2$ de forma que $\mathbf{X} \in S_1$ ou $\mathbf{X} \in S_2$
- Regra:
 - se $\mathbf{X} \in S_1$, então $a = a_1$ (aceita H_0)
 - se $\mathbf{X} \in S_2$, então $a = a_2$ (rejeita H_0)

Regra de Decisão

- Exemplo: Seja X uma observação proveniente da Normal $N(\mu, 1)$
 - μ desconhecida
 - Teste: $H_0 : \theta = 0$ vs $H_1 : \theta \neq 0$
 - se $X > \frac{1}{2}$ ou $X < -\frac{1}{2}$, então $a = a_2$ (rejeita H_0)
 - se $X \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, então $a = a_1$ (aceita H_0)
 - $S_2 = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ é chamada região de rejeição de H_0 , ou região crítica do teste.

Risco de Decisão

- Erro tipo I = {rejeitar H_0 | H_0 é verdadeira}
- Erro tipo II = {aceitar H_0 | H_0 é falsa}

	a_1 (aceitar H_0)	a_2 (rejeitar H_0)
H_0 verdadeira	—	erro tipo I
H_0 falsa	erro tipo II	—

Risco de Decisão

- Erros no exemplo de motivação:

$$H_0 : \theta = 0.6 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = 0.9$$

- Erro tipo I = {rejeitar H_0 | H_0 é verdadeira} = $\{\theta = 0.9 | \theta = 0.6\}$
- Erro tipo II = {aceitar H_0 | H_0 é falsa} = $\{\theta = 0.6 | \theta = 0.9\}$
- Deseja-se controlar $P(\text{erro tipo I})$ e $P(\text{erro tipo II})$

Risco de Decisão

- Montando o teste no exemplo de motivação:

$$H_0 : \theta = 0.6 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = 0.9$$

- Seja X = número de pacientes para os quais o novo medicamento produz o efeito desejado
- $n = 10$ o tamanho da amostra
- $X \sim \text{Bin}(10, \theta)$

Risco de Decisão

- Se H_0 é verdadeira: $X \sim \text{Bin}(10, 0.6)$; $E(X) = 6$
- Se H_0 é falsa: $X \sim \text{Bin}(10, 0.9)$; $E(X) = 9$
- Vamos considerar a seguinte região de rejeição: $S_2 = \{8, 9, 10\}$
- Lembrando que X pode assumir os valores $0, 1, 2, \dots, 10$
- A região crítica S_2 determina as probabilidades de cometer os erros tipo I e II.

Risco de Decisão

$$\begin{aligned}P(\text{erro tipo I}) &= P(\text{rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é verdadeira}) \\&= P(X \in S_2 | \theta = 0.6) \\&= P(8 \leq X \leq 10 | \theta = 0.6) \\&= \sum_{x=8}^{10} P(X = x | \theta = 0.6) \\&\approx 0.1672\end{aligned}$$

Risco de Decisão

$$\begin{aligned}P(\text{erro tipo II}) &= P(\text{aceitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}) \\&= P(0 \leq X \leq 7 | \theta = 0.9) \\&= \sum_{x=0}^7 P(X = x | \theta = 0.9) \\&\approx 0.0702\end{aligned}$$

Risco de Decisão

- Observando a relação entre os erros tipo I e II, e S_2 :

$$H_0 : \theta = 0.6 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = 0.9$$

S_2	P(erro tipo I)	P(erro tipo II)
{8, 9, 10}	0.1672	0.0702
{9, 10}	0.0463	0.2639
{10}	0.0060	0.6513

Risco de Decisão

- À medida que procuramos diminuir a probabilidade de cometer erro tipo I, diminuimos a região S_2 , aumentando a probabilidade de cometer erro tipo II.
- Optamos então por controlar o erro tipo I (considerado mais grave).