Máxima verossimilhança e famílias exponenciais

- lembrar def de fecho de um conjunto: $\Theta = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$ $(-\infty,\infty)\times(0,\infty)$ (aberto)

$\Rightarrow$ $\underbrace{\partial\Theta}_{\text{fecho de }\Theta} = \{(a,b),\ a=\pm\infty,\ 0\le b\le\infty\}\cup\{(a,b),\ a\in\mathbb{R},\ b\in\{0,\infty\}\}$

$\{(a,b),\ a=\pm\infty,\ b\in\mathbb{R}^+\}\cup\{(a,b),\ b=\{0,\infty\},\ a\in\mathbb{R}\}$

- dizemos q' $\{\theta_m\}\subseteq\Theta$ aberto; $\theta_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \partial\Theta$

se $\forall$ subsequencia $\{\theta_{m_k}\}$ em Θ • $\theta_{m_k}\xrightarrow[k\to\infty]{} t\notin\Theta$

ou

• $|\theta_{m_k}|\xrightarrow[k\to\infty]{}\infty$

norma euclideana

Lema 1: seja $L:\Theta\to\mathbb{R}$; $\Theta\subset\mathbb{R}^p$ aberto, L contínua; suponha q' $\lim\{L(\theta):\theta\to\partial\Theta\}=-\infty$. Então $\exists\ \hat\theta\in\Theta$ tq $L(\hat\theta)=\max\{L(\theta),\theta\in\Theta\}$

- Existência e unicidade do estimador de MV nas flias exponenciais depende de
  - concavidade do log verossimilhança
  - lema anterior.

Proposição: Suponha q' $X\sim\overbrace{\{P_\theta,\theta\in\Theta\}}^{\mathcal{P}}$; $\Theta\subseteq\mathbb{R}^p$, aberto ; $p(\cdot/\theta)\in\mathcal{P}$. Se $\ell_x(\theta)=\ln(p(x/\theta))$ é estritamente concava e $\ell_x(\theta)\xrightarrow[\text{(ver)}]{}-\infty$ qdo $\theta\to\partial\Theta$, então o Estimador de MV $\hat\theta(x)$ $\exists!$

dem: exercício: $\theta\to\ell_x(\theta)$ é contínua em Θ, logo, pelo lema anterior $\ell_x(\theta)$ possui um máximo $\hat\theta(x)$ (EMV)

falta demonstrar unicidade;

Vamos supor q' $\hat\theta_1\neq\hat\theta_2$ e ambos maximizam $\ell_x(\theta)$; como $\ell_x(\theta)$ é estritamente concava, então $\ell_x\left(\frac{1}{2}\hat\theta_1+\frac{1}{2}\hat\theta_2\right)\overset{\downarrow}{>}\frac{1}{2}\ell_x(\hat\theta_1)+\frac{1}{2}\ell_x(\hat\theta_2)=\ell_x(\hat\theta_1)$

logo $\hat\theta_1$ não maximiza $\ell_x(\theta)$; absurdo! ou seja $\hat\theta(x)$ $\exists!$

2.3.1 $\quad p(x/\eta) = h(x).\exp\{\eta^T T(x) - A(\eta)\}$

<u>Teorema</u>: Suponha q' $\mathcal{P}$ é uma família exponencial canonica gerada por (T, h) ; T: suficiente e suponha q'

(i) $\mathcal{E}$ aberto ; $\mathcal{E}$ espaço natural canônico ; $\eta \in \mathcal{E}$.

(ii) a família $\mathcal{P}$ possui posto k.

Seja x: o valor observado de X e $t_0 = T(x)$

(a) se $t_0 \in \mathbb{R}^k$ verifica: $P(c^T.T(X) > c^T t_0) > 0 \quad \forall c \neq 0$ (*)

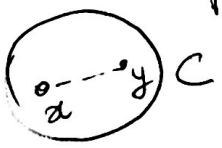
Então $\hat{\eta}$ (EMV) $\exists!$ e é solução da seguinte equação

$$\dot{A}(\eta) = E_\eta(T(X)) = t_0. \quad (\Delta)$$

(b) contrariamente, se t_0 não verifica (*) então $\hat{\eta}$ (EMV) $\nexists$

- O teorema fornece uma ferramenta para garantir existência e unicidade do EMV.

- def: Suporte convexo de uma probabilidade P é o menor conjunto convexo C tq $P(C) = 1$.



a reta entre x e y mora em C

<u>Corolario</u>: Nas condições do teorema anterior. Se C_T é o suporte convexo da distribuição de $T(X)$, então $\hat{\eta}$ (EMV) $\exists!$ sse $t_0 \in C_T^o$ onde C_T^o representa o interior de C_T.

<u>dem do teorema anterior</u>

$\hat{\eta}$ EMV $\exists!$: (exercício): se $\mathcal{P}$ representa a família exponencial canonica gerada por T e h. $\eta_0 \in \mathcal{E}$ (qualquer) $h_0(x) = q(x/\eta_0)$; $q \in \mathcal{P}$. Mostre q' $\mathcal{P}$ é gerada por T e h_0. (basta só re-escalar o param. natural)

$\eta \to \eta - \eta_0$

Vejamos:

$p(x/\eta) = h(x)\exp\{\eta^T T(x) - A(\eta)\}$; $h_0(x) = p(x/\eta_0)$

$= h_0(x).\overset{-1}{h_0(x)}\overset{h(x)}{}\exp\{\eta^T T(x) - A(\eta)\} = h_0(x).\dfrac{h(x)\exp\{\eta^T T(x) - A(\eta)\}}{q(x)\exp\{\eta_0^T T(x) - A(\eta_0)\}}$

$= h_0(x)\exp\{(\eta-\eta_0)^T T(x) - A(\eta-\eta_0)\}$

Seja $h(x) \overset{①}{=} p(x/\eta_0)$; $\eta_0 \in \mathcal{E}_p$.

Assumimos $t_0 = T(x) = 0$ (ja q' P e' identico a aquelo gerada por $T(x) - t_0$). Então se $\ell_x(\eta) = \ln(p(x/\eta))$ e $T(x) = 0$

$$\ell_x(\eta) = -A(\eta) + \ln[h(x)]$$

* Mostramos q' se $\nexists$ subsequencia $\{\eta_{m_k}\} \subseteq \{\eta_m\}$ de convergência a um ponto em $\mathcal{E}_p$, então $\ell_x(\eta_m) \to -\infty$ [pelo lema anterior]

(ou seja, toda subsequencia $\{\eta_{m_k}\} \subseteq \{\eta_m\}$ tem duas alternativas

a) $|\eta_{m_k}| \underset{k\to\infty}{\to} \infty$ caso 1 // b) $\eta_{m_k} \underset{k\to\infty}{\to} t \in \partial\mathcal{E}_p$. caso 2

ou seja $\eta_m \underset{m\to\infty}{\to} \partial\mathcal{E}_p$.)

Então $\exists\ \hat{\eta}$ (EMV) pelo lema 1.

Seja $\eta_m = \lambda_m u_m$; $u_m = \dfrac{\eta_m}{\|\eta_m\|}$; $\lambda_m = \|\eta_m\|$ assim $\|u_m\| = 1$

caso 1: $\lambda_{m_k} \to \infty$ ("diverge"); $u_{m_k} \to u$; seja $E_0 = E_{\eta_0}$; $P_0 = P_{\eta_0}$, então

$$\underline{\lim}_k \int e^{\eta_{m_k}^T T(x)} \cdot h(x)\,dx \overset{①}{=} \underline{\lim}_k E_0\left(e^{\lambda_{m_k} u_{m_k}^T T(X)}\right)$$

$$\geq \underline{\lim}_k e^{\lambda_{m_k}\delta} \cdot P_0\left\{u_{m_k}^T T(X) > \delta\right\} \quad (*)$$

$$\geq \underline{\lim}_k e^{\lambda_{m_k}\delta} P_0\left\{u^T T(X) > \delta\right\} = \infty$$

Ja q' se $\delta > 0$ $P_0\left(u^T \cdot T(X) > \delta\right) > 0$

então $A(\eta_{m_k}) = \ln\left(\int e^{\eta_{m_k}^T T(x)} h(x)\,dx\right) \to \infty$

$\Rightarrow \ell_x(\eta_{m_k}) \underset{k\to\infty}{\to} -\infty$. ✓

caso 2 : $\lambda_{m_k} \to \lambda$; $u_{m_k} \to u$. Então $\lambda . u \notin \xi_\varphi$ por hipótese

logo, $\lim_k E_0\left(e^{\lambda_{m_k} u_{m_k}^T T(X)}\right) = E_0\left(e^{\lambda u^T . T(X)}\right) = \infty$

ie. $\lim_k l_x(\eta_{m_k}) = -\infty$.

Finalmente, $l_x(\eta_m) \to -\infty$ e $\hat{\eta}$ (EMV) $\exists$.

Exercício : demonstre unicidade de $\hat{\eta}$.

(b) continuação ...

Não existência : Se t_0 não verifica $P_0(c^T . T(X) > c^T t_0) > 0$ $\forall c \neq 0$

$\Rightarrow E_0(c^T T(X)) \leq 0 \Rightarrow E_\eta(c^T T(X)) \leq 0$ $\forall \eta$ (Exercício)

então $\exists$ $c \neq 0$ tq $P_0(c^T T(X) \leq 0) = 1$

Pelo absurdo

$\mathcal{P}(h_0, T) = \mathcal{P}(h, T)$

Se $\hat{\eta}$ $\exists$ $\Rightarrow E_{\hat{\eta}}(T) = \overset{t_0 = 0}{0} \Rightarrow E_{\hat{\eta}}(c^T T) = 0 \Rightarrow P_{\hat{\eta}}(c^T T = 0) = 1$

ou seja $\mathcal{P}$ não possui posto K.

Def : a flia $\mathcal{P}$ possui posto K se $P_\eta\left[\sum_{j=1}^{K} a_j T_j(X) = a_{K+1}\right] < 1$

Salvo qdo $a_j = 0$ $\forall j$

Exemplo: Modelo Gaussiano. Suponho $X_1, \ldots, X_n$ iid. $N(\mu, \sigma^2)$

$\mu \in \mathbb{R}$; $\sigma^2 > 0$. $T(\underline{X}) = \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2\right)$ e $h(\underline{X}) = 1$ gera a família exponencial da Normal. Evidentemente $C_T = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

Se $n = 1$ $C_T^0 = \emptyset$ $T(X_1) = (X_1, X_1^2)$: 1 ponto numa parabola

quadrado do 1º coordenada

logo $\nexists$ EMV.

Se $n \geq 2$ $T(X)$ possui densidade tq $C_T = C_T^0$ e EMV $\exists$!

sempre

<u>Teorema</u>. Suponha q' as condições do teorema anterior são validas ((i) e (ii)) e $T_{k\times 1}$ apresenta densidade contínua em $\mathbb{R}^k$. Então o EMV $\hat{\eta}$ $\exists$ com probabilidade 1 e necessariamente verifica (Δ) (do teo 2.3.1)

<u>Exemplo</u>. Familia Gama: $X_1, \dots, X_n$ iid com densidade $p>0, \lambda>0$

$$g_{p,\lambda}(x) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} e^{-\lambda x} x^{p-1} \qquad x>0$$

$$T(\underline{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i), \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \; ; \; h(x) = \frac{1}{x} \; ; \quad \eta_1 = p \; ; \; \eta_2 = -\lambda$$

$$A(\eta_1, \eta_2) = n \left\{ \ln \Gamma(\eta_1) - \eta_1 \ln(-\eta_2) \right\}$$

deduzir q'

$$\frac{\Gamma'(\hat{p})}{\Gamma(\hat{p})} - \ln(\hat{\lambda}) = \overline{\ln(x)} \quad ; \quad \frac{\hat{p}}{\hat{\lambda}} = \bar{x}$$

$$\overline{\ln(x)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

→ equações implícitas

para $n \geq 2$ T possui densidade, logo pelo Teorema anterior $\hat{\eta}$ EMV $\exists!$ com probabilidade 1 i.e o sistema tem solução e é único.

$$\mathcal{P} = \{ S(x) \cdot \exp\{ \eta^T T(x) - A(\eta) \} \}$$

(*) $$\lim_k \int e^{\eta_{m_k}^T T(x)} \underbrace{h(x)}_{p(x|\eta_0)} dx = \lim_k E_0\left(e^{\lambda_{m_k} \cdot u_{m_k}^T T(x)} \right)$$

$$= \lim_k \int e^{\lambda_{m_k} \cdot u_{m_k}^T T(x)} h(x)\, dx = \lim_k e^{\lambda_{m_k} \cdot \delta} \int e^{\lambda_{m_k} [\overbrace{u_{m_k}^T T(x) - \delta}^{\to 0 \to P_0(u^T T(x) > \delta) \to 0 \ (2)}]} h(x)\, dx$$

$$\geq \lim_k e^{\lambda_{m_k} \delta} \int_{u_{m_k}^T T(x) > \delta} h(x)\, dx \geq \lim_k e^{\lambda_{m_k} \delta} \int_{u^T T(x) > \delta} h(x)\, dx = \underbrace{\lim_k \overset{\to \infty}{e^{\lambda_{m_k} \delta}} \cdot \underbrace{P_0(u^T T(x) > \delta)}_{>0}}_{\infty}$$

$\downarrow$ Hip (a)

Nota

Caso 2 NON

$$E_0\{ e^{\lambda u^T T(x)} \} = \int e^{\lambda u^T T(x)} h(x)\, dx = \infty$$

ou seja em cada uma das situações a) e b) $\lim \{ L(\theta), \theta \to \partial\Theta \} = -\infty$.

?

Unicidade

$\hat{\eta}$ solução de $\dot{A}(\eta) = E_\eta(T(X)) = t_0$.

1º) $\hat{\eta}$ solução de $\dot{A}(\eta) \overset{(**)}{=} E_\eta(T(X)) \overset{(*)}{=} t_0$

2º) $\hat{\eta}$ única

se $\hat{\eta}$ for solução de (*) é natural q' seja único pq q' $\dot{A}$ é 1:1 teo 1.6.4 (aula dos fluxos exponenciais)

(**) : se $T(x) = t_0$, $p(x|\eta) = h(x)\, e^{\eta \cdot t_0 - A(\eta)}$

$$\frac{d}{d\eta} p(x|\eta) = h(x) \cdot e^{\eta t_0 - A(\eta)} \cdot [t_0 - \dot{A}(\eta)]$$

$= 0$ sse $\dot{A}(\eta) = t_0$